

DIE MAXWELLGLEICHUNG MIT WECHSELNDEN RANDBEDINGUNGEN

Peter Kuhn[†]

August 1999

arXiv:1108.2028v1 [math.AP] 10 Aug 2011

[†]Dies ist ein preprint meiner Dissertation (Dr. rer. nat.), welche dem Fachbereich 6, Mathematik und Informatik, der Universität Essen, Deutschland, im August 1999 vorgelegt und bei Shaker (Aachen, Deutschland) im Januar 2000 publiziert wurde.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Inhalt	1
1.2	Geschichte	2
1.3	Vorgehensweise	3
2	Vorbereitung	4
2.1	Bezeichnungen	4
2.2	Differentialformen	5
2.3	Geometrische Voraussetzungen	8
2.4	Die Sobolevräume H_m^q	9
2.5	Die Räume $R^{q,\Gamma}$ und $D^{q,\Gamma}$	12
2.6	Die Räume $R_{-1/2}^q$ und $D_{-1/2}^q$	16
2.7	Approximationseigenschaften	16
2.8	Kegelspitzen	18
3	Die kompakte Einbettung	21
4	Ein Regularitätssatz	29
5	Spursätze	35
5.1	Die Spursätze in R^q und D^q	35
5.2	Wechselnde Randbedingungen	38
6	Lösungstheorie	40
7	Die Dirichlet–Neumann Felder	42
8	Eigenformen	45
8.1	Die halbe Kreislinie	45
8.2	Der Halbkreis	46
	Literaturverzeichnis	53
	Symbolverzeichnis	55

1 Einleitung

1.1 Inhalt

Sei S ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 , dessen Rand ∂S in die beiden Komponenten Γ_1 und Γ_2 zerlegt ist. Seien ferner ϵ und μ (Dielektrizität und Permeabilität) gleichmäßig positiv definite 3×3 Matrizen und \vec{N} die äußere Normale. Wir betrachten das Maxwellsche Randwertproblem zu gegebenen Feldern \vec{J} und \vec{K} Lösungen \vec{E} und \vec{H} der Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + i\omega\mu\vec{H} &= \vec{J} \\ \operatorname{rot} \vec{H} - i\omega\epsilon\vec{E} &= \vec{K} \\ \vec{N} \wedge \vec{E} &= 0 \text{ in } \Gamma_1 \\ \vec{N} \cdot \vec{E} &= 0 \text{ in } \Gamma_2 \end{aligned}$$

zu finden. Um eine Lösungstheorie für die Maxwellschen Gleichungen aufzubauen, kann man diese in die Theorie alternierender Differentialformen beliebigen Ranges in beliebigen Raumdimensionen einbetten: Identifizieren wir die Felder $\vec{E}, \vec{K}, \vec{N}$ mit den 1-Formen $E := \vec{E} \cdot d\vec{s}$, $K := -\vec{K} \cdot d\vec{s}$, $N := \vec{N} \cdot d\vec{s}$ und \vec{H}, \vec{J} mit den 2-Formen $H := \vec{H} \cdot d\vec{F}$, $J := \vec{J} \cdot d\vec{F}$, wobei

$$d\vec{s} := \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix}, \quad d\vec{F} := \begin{bmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \\ dx^3 \wedge dx^1 \\ dx^1 \wedge dx^2 \end{bmatrix},$$

so erfüllen diese

$$\left. \begin{aligned} dE + i\omega\mu H &= J \\ \delta H + i\omega\epsilon E &= K \\ N \wedge E &= 0 \text{ in } \Gamma_1 \\ N \wedge *E &= 0 \text{ in } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(positiv definite Matrizen σ werden durch die Vorschrift $\sigma(\vec{E}) \cdot d\vec{s} = (\sigma\vec{E}) \cdot d\vec{s}$ zu positiv definiten Transformationen von Differentialformen). Die äußere Ableitung d bezeichnen wir in Zukunft mit rot , die Koableitung δ mit div . Durch eine geeignete schwache Formulierung lassen sich die Gleichungen in (1) mit Hilbertraummethode behandeln:

Wir schreiben $L_2^q(S)$ für die Menge der q -Formen, deren Komponentenfunktionen quadratintegrabel sind, $L_{2,\sigma}^q(S) := \sigma^{-1/2} L_2^q(S)$ und $R^q(S)$ bzw. $D^q(S)$ für die Menge der Formen aus $L_2^q(S)$, deren Rotation bzw. Divergenz Elemente aus $L_2^{q+1}(S)$ bzw. $L_2^{q-1}(S)$ sind. Die Verallgemeinerung der Randbedingung $N \wedge E = 0$ in Γ_1 bzw. $N \wedge *E = 0$ in Γ_2 kennzeichnen wir mit einem oberen Index: $R^{q,\Gamma_1}(S)$ bzw. $D^{q,\Gamma_2}(S)$. Geringe Voraussetzungen an die Trennmengen $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ (vgl. Satz 2.20) liefern einen selbstadjungierten Maxwelloperator

$$\begin{aligned} D(M) &:= R^{q,\Gamma_1}(S) \times D^{q+1,\Gamma_2}(S) \subset L_{2,\epsilon}^q(S) \times L_{2,\mu}^q(S) \\ M &:= \begin{pmatrix} 0 & i\epsilon^{-1}\operatorname{div} \\ i\mu^{-1}\operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und die Gleichungen aus (1) gehen über in

$$M \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\epsilon^{-1}K \\ i\mu^{-1}J \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Der Maxwelloperator wird vom Raum

$$R^{q,\Gamma_1}(S) \cap \overline{\epsilon^{-1}\operatorname{div} D^{q+1,\Gamma_2}(S)} \times D^{q+1,\Gamma_2}(S) \cap \overline{\mu^{-1}\operatorname{rot} R^{q,\Gamma_1}(S)} \quad (3)$$

und dessen orthogonalem Komplement

$$R_0^{q,\Gamma_1}(S) \times D_0^{q+1,\Gamma_2}(S) \quad (4)$$

reduziert (der untere Index 0 steht für Rotations- bzw. Divergenzfreiheit). Da die Behandlung der durch (4) reduzierten Gleichung evident ist, ist vorwiegend der durch (3) reduzierte Maxwelloperator Gegenstand unserer Betrachtungen. Für einen glatten Rand ∂S und eine glatte Trennmengen werden wir zeigen, daß die Einbettung

$$R^{q,\Gamma_1}(S) \cap D^{q,\Gamma_2}(S) \hookrightarrow L_2^q(S) \quad (5)$$

kompakt ist. Dieses Ergebnis hat als Konsequenz, daß die Räume $\text{rot } R^{q,\Gamma_1}(S)$, $\text{div } D^{q,\Gamma_2}(S)$ abgeschlossen und die Dirichlet–Neumann–Felder

$$R_0^{q,\Gamma_1}(S) \cap D_0^{q,\Gamma_2}(S) \quad (6)$$

endlich dimensional sind. Das Spektrum des Maxwelloperators besteht dann nur aus isolierten Punkten in \mathbb{R} . Darüber hinaus existiert ein kompakter Lösungsoperator, so daß für die Gleichung (2) die Fredholmsche Alternative gilt (vgl. [32]).

Wir werden die Tangentialspuren von Formen aus $R^q(S)$ untersuchen. Schon bekannt ist, daß im Falle eines glatten Gebietes S ein linearer, stetiger und surjektiver Spuoperator von $R^q(S)$ nach $R_{-1/2}^q(\partial S)$, die Menge der Funktionale auf $H_{1/2}^q(\partial S)$, deren Tangentialrotation Funktionale auf $H_{1/2}^{q+1}(\partial S)$ sind, existiert. Hierfür liefern wir einen weiteren Beweis. Wir werden für eine glatte Trennmeng e die Existenz eines linearen stetigen Spuoperators $R^q(S) \rightarrow R_{-1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$ zeigen. Letzter Raum besteht aus den Einschränkungen der Funktionale aus $R_{-1/2}^q(\partial S)$ auf $H_{1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$, Elemente aus $H_{1/2}^q(\partial S)$, die fast überall in Γ_2 verschwinden. Mit einer ähnlichen Technik lösen wir dann das statische Maxwellsche Problem

$$\text{rot } E = F, \text{div } E = G, N \wedge E = \lambda .$$

Dualität liefert entsprechende Resultate für den Raum $D^q(S)$.

Im Falle einer leeren Trennmeng e lassen sich aus den obigen Aussagen ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator $R_{-1/2}^q(\Gamma_1) \rightarrow R^q(S)$ sowie eine Lösungstheorie für das Problem

$$\text{rot } E = F, \text{div } E = G, N \wedge E = \lambda \text{ in } \Gamma_1, N \wedge *E = \theta \text{ in } \Gamma_2 \quad (7)$$

ableiten.

Abschließend betrachten wir zwei weitere Probleme im Zusammenhang mit wechselnden Randbedingungen. Zum einen zeigen wir für ein glattes Gebiet im \mathbb{R}^N , dessen Randstück Γ_1 in K glatte Zusammenhangskomponenten zerfällt, daß die Dimension des Raumes (6) für $q = 1$ gerade $K - 1$ ist. Zum anderen wollen wir die Eigenformen des Maxwelloperators auf der halben Kreislinie und dem Halbkreis bestimmen und Aussagen über deren Regularitätseigenschaften machen.

1.2 Geschichte

Die Verallgemeinerung der Maxwellgleichungen auf Differentialformen geht auf Weyl [35] zurück, der mit Integralgleichungsmethoden eine Lösungstheorie für den homogenen isotropen Fall ($\epsilon = \mu = 1$) aufstellen konnte.

In glatten Gebieten folgt die kompakte Einbettung

$$R^{q,\partial S}(S) \cap D^q(S) \hookrightarrow L_2^q(S) \quad (8)$$

mit dem Rellichschen Auswahlssatz aus der stetigen Einbettung

$$R^{q,\partial S}(S) \cap D^q(S) \hookrightarrow H_1^q(S) . \quad (9)$$

Einen solchen Regularitätsbeweis lieferte Leis in [14] für glatte Gebiete im \mathbb{R}^3 .

Für die auf Differentialformen verallgemeinerten Maxwellgleichungen konnte Weck in [31], [32] eine große Klasse von nicht glatten Gebieten (verallgemeinerte Kegelgebiete) angeben, in denen die Einbettung (8) kompakt ist. Er behandelte den inhomogenen anisotropen Fall (ϵ und μ geeignete Transformationen von Differentialformen) mittels einer vollständigen Induktion über die Raumdimension. Dabei zeigte er auch die Unabhängigkeit der kompakten Einbettung von ϵ und μ .

Ein Beweis für Gebiete im \mathbb{R}^3 mit der eingeschränkten Kegeleigenschaft wurde von Weber in [29] geführt. Die Voraussetzungen an das Gebiet wurden lediglich für die Existenz eines Calderonschen Fortsetzungsoperators $H_2(S)$ nach $H_2(\mathbb{R}^3)$ benötigt, um dann (auf Felder aus ∇H_2) den Rellichschen Auswahlssatz anzuwenden.

Witsch ersetzte in [36] diese Kombination, Fortsetzungsoperator und kompakte Einbettung, durch einen kompakten Fortsetzungsoperator $H_2(S)$ nach $H_1(\mathbb{R}^N)$, für dessen Existenz er die Voraussetzungen in [29] weiter zu p -cusp Gebieten mit $p < 2$ abschwächen konnte.

Einen elementaren Beweis brachte Picard in [20] im Fall der Weylschen Verallgemeinerung für Lipschitz–Gebiete,

eine größere Menge, als die der Gebiete mit der eingeschränkten Kegeleigenschaft. Nachdem er die Unabhängigkeit der kompakten Einbettung von Lipschitz-Transformationen gezeigt hatte, lokalisierte er das Problem und konnte es dann auf die Einheitskugel übertragen. Dort führten schon bekannte Resultate zum Ziel.

Eine Vereinfachung des Beweises aus [32] wurde in [21] für $S \subset \mathbb{R}^3$ geführt. Darüber hinaus wurde durch einen anderen Induktionsanfang die Klasse der Gebiete mit kompakter Einbettung (8) nochmals erweitert. Dies führte unter anderem zu Teilmengen aus \mathbb{R}^3 , die lokal Lipschitz-homöomorph zu Gebieten sind, die aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten von p -cusp's, $p < 2$ oder Kegelspitzen bestehen.

Spurooperatoren $R^q(S) \rightarrow R^q_{-1/2}(\partial S)$, Fortsetzungssätze und Lösungstheorien für das statische Problem

$$\operatorname{rot} E = F, \operatorname{div} E = G \text{ in } S, N \wedge E = f \text{ in } \partial S$$

wurden von Georgescu in [8] und von Paquet in [16] für Differentialformen auf kompakten glattberandeten Mannigfaltigkeiten untersucht.

Alonso und Valli fanden in [2] einen Weg, den Fortsetzungsoperator für Gebiete im \mathbb{R}^3 durch Lösen geeigneter Differentialgleichungen herzuleiten. Im Falle einer leeren Trennmengen charakterisierten sie die Tangentialspuren der Felder aus $R^q(S)$ auf einem Randstück Γ_1 und brachten eine Lösungstheorie für das Problem (7).

Weitere Untersuchungen des statischen Problems findet man in [13] und [18]. Die hierbei auftretenden harmonischen Felder wurden in [6], [7] und [15] mit klassischen Methoden behandelt. Für nicht glatte Gebiete S hat Picard in [17], [19] gezeigt, daß sich die Dimensionen der harmonischen Differentialformen oder Neumann-Felder (6) im Falle $\Gamma_2 = \partial S$, $\Gamma_1 = \emptyset$ und q beliebig durch die Betti-Zahlen des Gebietes ausdrücken lassen; genauer

$$\dim(R_0^q(S) \cap D_0^{q,\partial S}(S)) = \beta_q,$$

wobei β_q gerade die q -te Betti Zahl ist.

Den Fall gemischter Randbedingungen und leerer Trennmengen betrachtete Kress in [12] für Gebiete im \mathbb{R}^3 .

Saranen untersuchte in [24] die Güte der Lösungen der Maxwellgleichungen in Kegelspitzen, indem er nach den Eigenformen auf dem Kegeldeckel entwickelte und die Koeffizienten untersuchte. Hierbei benutzte er die Resultate aus [32].

1.3 Vorgehensweise

In Kapitel 2 werden wir zunächst grundlegende Bezeichnungen einführen und einige Werkzeuge für deren Anwendung bereitstellen. Eine besondere Bedeutung kommt hier den Approximationseigenschaften zu. Während im Falle homogener Randbedingungen die Segmenteigenschaft genügt, um die Räume $R^q(S)$ und $D^q(S)$ durch glatte Formen anzunähern, müssen wir im Falle wechselnder Randbedingungen zusätzlich ähnliche Voraussetzungen an die Randstücke Γ_1 oder Γ_2 stellen (Satz 2.20). Dies ist notwendig, um später auf den Satz von Stokes in Lemma 2.22 zugreifen zu können. Dieses Lemma liefert ein zweites wichtiges Werkzeug: Mit Hilfe von [33] stellen wir hier Formeln zur Verfügung, die den Zusammenhang zwischen der Rotation auf dem Rand und der Rotation im Inneren spezieller Gebiete, den Kegelspitzen, darlegen.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir in Kapitel 3, Satz 3.2 für einen glatten Rand ∂S und eine glatte Trennmengen die Kompaktheit der Einbettung in (5). Den Beweis, führen wir wie in [21] (vgl. auch [32] und [31]) per Induktion über die Raumdimension: Gilt die kompakte Einbettung, so können wir nach Eigenformen entwickeln. Aus diesem Entwicklungsergebnis in $(N - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten folgt schließlich die kompakte Einbettung in N -dimensionalen Gebieten mit glattem Rand und glatter Trennmengen. Bei diesem Dimensionssprung kommen uns die oben erwähnten Hilfsmittel zugute.

In Kapitel 4 werden wir einen Regularitätssatz für Formen herleiten. Hier halten wir uns im wesentlichen an den Beweis aus [30] und modifizieren diesen an den Stellen, an denen von der speziellen Situation im \mathbb{R}^3 Gebrauch gemacht wird. Dazu benutzen wir eine Spiegelungstechnik wie in [34].

Mit Hilfe dieses Regularitätsergebnisses werden wir in den folgenden beiden Kapiteln Sätze über Spuren, Fortsetzungen (Kapitel 5) und Lösungstheorie zum statischen Maxwellproblem mit homogenen Randbedingungen (Kapitel 6) beweisen. Die hier angewandte Technik basiert auf der Formulierung geeigneter koerzitiver Hilbertraumprobleme und geht auf [2] zurück.

Um in Kapitel 7 für $q = 1$ die Dimension, der im Falle wechselnder Randbedingungen auftretenden Dirichlet-Neumann-Felder (6) zu bestimmen, verallgemeinern wir die Methode aus [18].

In Kapitel 8 berechnen wir zunächst für die halbe Kreislinie die Eigenformen des Maxwelloperators. Mit Hilfe

des Entwicklungsergebnisses aus Kapitel 3 können wir die Eigenformen für den Halbkreis nach diesen entwickeln. Die Koeffizienten dieser Entwicklung erfüllen dann die Besselsche Differentialgleichung, über deren Lösungen, die Besselfunktionen, viele Arbeiten verfaßt wurden. Im Falle homogener Randbedingungen wurde ein ähnliches Verfahren in [24] angewandt.

2 Vorbereitung

2.1 Bezeichnungen

Mit \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} bezeichnen wir die Menge der reellen bzw. komplexen Zahlen, mit \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0. Für komplexe Zahlen z ist \bar{z} die Konjugation. Die imaginäre Einheit nennen wir i . Falls U eine Menge und n eine natürliche Zahl ist, definieren wir rekursiv $U^1 := U$, $U^n := U^{n-1} \times U$. Für die Normen in \mathbb{R}^N und \mathbb{C}^N schreiben wir $|\cdot|$.

Sind U, V Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) , so ist \bar{U} der Abschluß und ∂U der Rand von U . Ist nicht klar, bezüglich welcher Metrik der Abschluß zu bilden ist, versehen wir \bar{U} mit einem oberen Index d . Wir sagen $U \subset\subset V$, wenn \bar{U} kompakt und $\bar{U} \subset V$ gilt. Die Abstandsfunktion bezeichnen wir mit dist und setzen $\text{dist}(U, \emptyset) := \infty$.

Für zwei Mengen U, V ist $\mathcal{F}(U, V)$ die Menge aller Abbildungen f , deren Definitionsbereich $D(f) := U$ ist, und deren Wertebereich $R(f)$ in V liegt; $N(f)$ ist der Nullraum. Gilt $U' \subset U$, so bezeichnen wir mit $f|_{U'}$ die Einschränkung von f auf U' . Wir schreiben $\text{supp } f$ für den Träger einer komplexwertigen Funktion f . Für $G \subset \mathbb{R}^N$, G offen definieren wir weiter

$C_\infty(G)$	Raum der unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen
$\mathring{C}_\infty(G)$	$:= \{\varphi \in C_\infty(G) \mid \text{supp } \varphi \subset\subset G\}$
$C_\infty(\bar{G})$	$:= \{\varphi _G \text{ mit } \varphi \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^N)\}$
$L_p(G)$	Raum der Äquivalenzklassen aller Lebesgue-meßbaren Funktionen f mit $\ f\ _{L_p(G)} := (\int_G f(x) ^p dx)^{1/p} < \infty$, $p = 1, 2$
$\langle f, g \rangle_{L_2(G)}$	$:= \int_G f(x) \overline{g(x)} dx$
$H_m(G)$	Sobolevräume (siehe [37, Definition 3.1]) mit Norm $\ \cdot\ _{H_m(G)}$.

Wir schreiben $H_1 \oplus H_2$ für die orthogonale Summe zweier Unterräume H_1, H_2 eines Hilbertraumes. Der zu einem linearen Operator A adjungierte Operator ist A^* . Haben wir in einem Raum H ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ erklärt, so setzen wir $\|x\|_H := (\langle x, x \rangle_H)^{1/2}$ für $x \in H$. Die Dimension eines Vektorraumes V ist $\dim V$.

Mit c bezeichnen wir Konstanten, die sich im Laufe eines Beweises ändern können, deren Änderungen aber unabhängig von aus dem Kontext ersichtlichen Eigenschaften sind.

Elemente $(i_1, \dots, i_q) \in \{1, \dots, N\}^q$ mit $i_k \neq i_l$ für $k \neq l$ nennen wir Multiindizes der Länge $|I| := q$. Gilt $i_1 < \dots < i_q$ für einen Multiindex $I = (i_1, \dots, i_q)$, so ist dieser geordnet. Die Menge der geordneten Multiindizes bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(q, N)$ und sagen $j \in I$, falls $j \in \{i_1, \dots, i_q\} =: \mathcal{I}$, $j \notin I$ entsprechend. Im ersten Fall ist $I - j =: (\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{q-1})$ der geordnete Multiindex der Länge $q - 1$ mit $\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{q-1}, j\} = \mathcal{I}$, im zweiten Fall schreiben wir $I + j =: (\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{q+1})$ für den geordneten Multiindex der Länge $q + 1$ mit $\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{q+1}\} \setminus \{j\} = \mathcal{I}$. Für einen ungeordneten Multiindex I schreiben wir $\sigma(I)$ für das Vorzeichen der Permutation, welche die Ordnung wiederherstellt. Somit gilt für Multiindizes I der Länge p und J der Länge q

$$\sigma(I, J) = (-1)^{pq} \sigma(J, I),$$

wobei

$$\begin{aligned} I, J &:= (I, J) := (i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q) \\ \text{für} \quad I &= (i_1, \dots, i_p), \quad J = (j_1, \dots, j_q) \end{aligned}$$

für die Konkatenation von I und J steht. Wir bezeichnen mit \mathcal{J} die Abbildung, die einen ungeordneten Multiindex sortiert und mit I' den Multiindex, der die Gleichung $\mathcal{J}(I, I') = (1, \dots, N)$ erfüllt. Natürliche Zahlen wollen wir mit Multiindizes der Länge 1 identifizieren.

Führen wir die Vorzeichen der "Divergenz" (siehe (46) und Seite 6) und von "**" in den Raumdimensionen N

und $N - 1$ ein durch

$$\begin{aligned}\sigma_q &:= (-1)^{N(q-1)} & , & \quad \sigma'_q := (-1)^{(N-1)(q-1)} & , \\ \kappa_q &:= (-1)^{q(N-q)} & , & \quad \kappa'_q := (-1)^{q(N-1-q)} & ,\end{aligned}$$

so gelten

$$\begin{aligned}\kappa_{q+2} &= \kappa_q & , & \quad \sigma_{q+2} = \sigma_q & , & \quad \kappa_q = \kappa_{N-q} & , \\ \sigma_{N-q} &= \sigma_{q+1} & , & \quad \kappa_q \sigma_{q+1} = (-1)^q & , & \quad \sigma_q \sigma_{q+1} = (-1)^N & , \\ \sigma_q \kappa_q &= (-1)^{N+q} & , & \quad & & & \end{aligned}$$

κ', σ' entsprechend, und

$$\kappa'_{q-1} \sigma_q = 1 \quad , \quad \sigma'_q \kappa_q = (-1)^{N+1} \quad .$$

Das Kronecker-Symbol bezeichnen wir mit $\delta_{i,j}$.

2.2 Differentialformen

Sei in dieser Arbeit stets M eine vollständige N -dimensionale reelle differenzierbare Mannigfaltigkeit, versehen mit einer Orientierung und Riemannscher Metrik, kurz Mannigfaltigkeit, und S eine offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß in M . Die folgenden Aussagen entnehmen wir [3] oder [11].

Aus den Voraussetzungen an M folgt die Existenz einer Metrik d_M auf M . Wir nennen Paare (V, h) Karten um x in M oder Koordinatenumgebung um x , wenn V eine offene Umgebung von x in M ist, und die Abbildung h diese Umgebung diffeomorph auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^N abbildet. Wir treffen folgende Konvention:

Diffeomorphismen $V \rightarrow U$ sind Einschränkungen invertierbarer Abbildungen $V_0 \rightarrow U_0$ mit V_0, U_0 offen, $V \subset\subset V_0, U \subset\subset U_0$, die in beiden Richtungen unendlich oft differenzierbar sind.

Die Tangenten in einem Punkt x an M , die wir als Derivationen auf $C_\infty(m)$ (das ist die Menge der reellwertigen Funktionen f , die in einer Umgebung $U := U(f) \subset M$ von m definiert und unendlich oft differenzierbar sind) auffassen können, spannen einen N -dimensionalen linearen Raum \mathcal{T}_x oder $\mathcal{T}M_x$ auf. Für $x \in M$ bezeichnen wir den komplexen Raum der alternierenden kovarianten Tensoren vom Rang q zum Tangentialraum von x mit $A^q(x)$ und dessen Bündel mit $A^q(M)$. Elemente aus $A^q(M)$ nennen wir q -Formen oder Formen. Ist $q < 0$ oder $q > N$, so identifizieren wir solche mit der Nullabbildung. Auf dem Raum $A^q(M)$ ist ein äußeres Produkt $\wedge : A^q(M) \times A^p(M) \rightarrow A^{q+p}(M)$ (punktweise) erklärt mit der Eigenschaft

$$\bigwedge_{\Phi \in A^q(M)} \bigwedge_{\Psi \in A^p(M)} \Phi \wedge \Psi = (-1)^{qp} \Psi \wedge \Phi \quad .$$

In einer Koordinatenumgebung (V, h) um x bilden die Differentiale dh^i der Koordinatenfunktionen h_i eine Basis von $A^1(x)$, damit auch von $A^1(S \cap V)$, und wir können in $S \cap V$ eine Form Φ eindeutig darstellen durch

$$\Phi = \sum_{I \in \mathcal{S}(q, N)} \Phi_I dh^I \quad (10)$$

mit $\Phi_I : V \rightarrow \mathbb{C}$ und $dh^I := dh^{i_1} \wedge \cdots \wedge dh^{i_q}$ für $I := (i_1, \dots, i_q)$. Wegen der Anforderungen an M ist $A^1(x)$ mit einer Orientierung und Bilinearform versehen. Für eine positiv orientierte Orthonormalbasis $\{dh^i \mid i = 1, \dots, N\}$ erklären wir punktweise den Sternoperator mittels

$$*dh^I = \sigma(I, I') dh^{I'} \quad (11)$$

Dieser ist unabhängig von der Wahl der Karten und liefert einen Isomorphismus $*$: $A^q(S) \rightarrow A^{N-q}(S)$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}**\Phi &= \kappa_q \Phi \\ \Phi \wedge \Psi &= *\Phi \wedge *\Psi \\ *(\varphi\Phi) &= \varphi * \Phi\end{aligned}$$

für $\Phi \in A^q(S)$, $\Psi \in A^{N-q}(S)$ und $\varphi \in A^0(S)$.

Wir sagen $\varphi \in C_m(S)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$, wenn für eine Karte, dann alle Karten (V, h) die Funktionen $\varphi \circ h^{-1}$

in $C_m(h(S \cap V))$ liegen. Sind die Komponentenfunktionen einer Form Φ in der Darstellung (10) aus $C_m(S)$, so schreiben wir $\Phi \in C_m^q(S)$ und definieren weiter

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{C}_m^q(S) &:= \{\Phi \in C_m^q(S) \mid \text{supp } \Phi \subset\subset S\} \\ C_m^q(\overline{S}) &:= \{\Phi|_S \mid \Phi \in \overset{\circ}{C}_m^q(M)\} .\end{aligned}$$

Ist $q = 0$, verzichten wir manchmal auf den oberen Index q .

Die äußere Ableitung d hat die Eigenschaften

$$d(\Phi \wedge \Psi) = d\Phi \wedge \Psi + (-1)^q \Phi \wedge d\Psi \quad (12)$$

$$dd\Phi = 0 \quad (13)$$

für alle $\Phi \in C_\infty^q(S)$, $\Psi \in C_\infty^p(S)$ und ist lokal erklärt durch

$$\begin{aligned}d\Phi &= \sum_{I \in \mathcal{S}(q, N)} \sum_{j=1}^N \partial_j \Phi_I dh^j \wedge dh^I \\ &= \sum_{I \in \mathcal{S}(q+1, N)} \sum_{j \in I} \sigma(j, I-j) \partial_j \Phi_{I-j} dh^I\end{aligned} \quad (14)$$

mit $\partial_j \Phi_I := \frac{\partial}{\partial h_j} \Phi_I := d\Phi_I(\partial_j)$ für das Differential d und den Tangentialvektor ∂_j mit $dh_i(\partial_j) = \delta_{i,j}$, Φ wie in (10). Auf Formen $\Phi \in C_\infty(S)$ wirkt d wie das Differential. Die Koableitung $\delta := \sigma_q * d^*$ hat im Falle einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\{dh^i, i = 1, \dots, N\}$ lokal die Darstellung

$$\delta\Phi = \sum_{I \in \mathcal{S}(q-1, N)} \sum_{j \notin I} \sigma(j, I) \partial_j \Phi_{I+j} dh^I . \quad (15)$$

Gilt für eine Karte (V, h) und Zahlen a_i, b_i

$$Q := \{x \in M \mid a_i < h_i(x) < b_i, i = 1, \dots, N\} \subset V ,$$

so definieren wir für $\Phi = \Phi_I dh^I \in \overset{\circ}{C}_\infty^N(M)$

$$\int_Q \Phi := \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_N}^{b_N} \Phi_I(h_1, \dots, h_N) dh^N \cdots dh^1 . \quad (16)$$

Ist ξ_α eine der Überdeckung Q_α untergeordnete Zerlegung der 1, so ist der Ausdruck

$$\int_M E := \sum_\alpha \int_{Q_\alpha} \xi_\alpha \Phi$$

unabhängig von der Wahl der Karten. Integration über Teilmengen von M realisieren wir wie üblich mit der charakteristischen Funktion. Für $\Phi \in \overset{\circ}{C}_\infty^{N-1}(M)$ gilt

$$\int_M d\Phi = 0 . \quad (17)$$

Eine unendlich oft differenzierbare Abbildung $\tau : S \subset M \rightarrow \tilde{S} \subset \tilde{M}$ induziert eine Abbildung ($x \in S$)

$$\begin{aligned}\tau_* : \mathcal{T}M_x &\longrightarrow \mathcal{T}\tilde{M}_{\tau(x)} \\ t &\longmapsto \tau_* t \\ \text{mit } (\tau_* t)(f) &:= t(f \circ \tau) .\end{aligned}$$

Wir bezeichnen den Raum der q -Tupel von Tangentialvektoren aus \mathcal{T}_x bzw. $\mathcal{T}M_x$ mit \mathcal{T}_x^q bzw. $\mathcal{T}^q M_x$ und erklären für $\Phi \in A^q(\tilde{S})$ die Form $\tau^* \Phi \in A^q(S)$ durch

$$(\tau^* \Phi)_x(v) = \Phi_{\tau(x)}(\tau_* v) \quad (18)$$

für alle Tangentialvektoren $v \in \mathcal{T}_x^q$. Hierbei verstehen wir den Ausdruck $\tau_* v$ komponentenweise. Die Abbildung $\tau^* : A^q(\tilde{S}) \rightarrow A^q(S)$ hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\varphi \in A^0(\tilde{S})} \tau^* \varphi &= \varphi \circ \tau \\ \bigwedge_{\Phi \in A^q(\tilde{S})} \bigwedge_{\Psi \in A^p(\tilde{S})} \tau^*(\Phi \wedge \Psi) &= \tau^* \Phi \wedge \tau^* \Psi \\ \bigwedge_{\Phi \in C_\infty^q(\tilde{S})} d\tau^* \Phi &= \tau^* d\Phi \\ \bigwedge_{\Phi \in C_\infty^N(\tilde{S})} \int_S \tau^* \Phi &= \int_{\tilde{S}} \Phi, \end{aligned} \quad (19)$$

wobei die letzte Aussage nur für orientierungserhaltende Diffeomorphismen τ gilt. Für solche erklären wir die linearen Transformationen $\epsilon, \mu : A^q(S) \rightarrow A^q(S)$ durch

$$\epsilon := \epsilon_\tau := \epsilon_\tau^q := \kappa_q * \tau^* * (\tau^*)^{-1} \quad (20)$$

$$\mu := \mu_\tau := \mu_\tau^q := \kappa_q \tau^* * (\tau^{-1})^* * . \quad (21)$$

Der Kettenregel entnehmen wir die Eigenschaften

$$\begin{aligned} * \epsilon \tau^* &= \tau^* * \\ \epsilon \mu &= \text{id} . \end{aligned} \quad (22)$$

Lokal wirkt τ^* in folgender Weise: Bildet τ die Koordinatenumgebung $V \subset M$ diffeomorph auf $W \subset \tilde{M}$ ab, und sind $h_i : V \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^N$ und $g_i : W \rightarrow W_1 \subset \mathbb{R}^N$ die Koordinatenabbildungen, $F : V_1 \rightarrow W_1, x \mapsto g \circ \tau \circ h^{-1}(x)$ und

$$\Phi(w) := \sum_{I \in \mathcal{S}(q, N)} \Phi_I(w) dg^I ,$$

$w \in W$, so gilt für $v \in V$ nach [31]

$$\begin{aligned} \tau^* \Phi(v) &= \sum_{I \in \mathcal{S}(q, N)} \sum_{|J|=q} \sigma(J) E_{\mathcal{J}(J)}(\tau(v)) \partial_I F_J(h(v)) dh^I \\ \partial_I F_J(x) &:= \partial_{i_1} F_{j_1}(x) \cdots \partial_{i_q} F_{j_q}(x) . \end{aligned} \quad (23)$$

Für Koordinaten $x_i = \tau_i(y)$ im \mathbb{R}^N folgt daraus

$$\tau^* dx^i = d\tau_i(y) = \sum_{j=1}^N \partial_j \tau_i(y) dy^j . \quad (24)$$

Wir betrachten noch den Spezialfall der Inklusion: Ist ∂S eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M , so gilt für die Einbettung

$$\begin{aligned} \iota : \partial S &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

der Satz von Stokes

$$\int_S d\Phi = \int_{\partial S} \iota^* \Phi . \quad (25)$$

Wir benutzen ohne weiteren Kommentar die folgenden Konventionen:

- i) Für eine offene Teilmenge T_0 von T sei $\iota : T_0 \rightarrow T$ die Inklusion $x \mapsto x$. Die Einschränkung ι^* einer Form $\Phi \in A^q(T)$ auf T_0 bezeichnen wir wieder mit Φ und bemerken, daß die Einschränkung nicht nur mit äußerem Produkt und äußerer Ableitung, sondern auch mit Sternoperator und Koableitung tauscht.

- ii) Ist $\Phi \in A^q(T_0)$, $T_0 \subset T$, so bezeichnen wir die Fortsetzung von Φ auf T durch 0 auch wieder mit Φ .

Gilt in ii) $\text{dist}(\text{supp } \Phi, T \setminus T_0) > 0$ und gehört Φ zu irgendeinem der im folgenden eingeführten Räume von q -Formen auf T_0 (z.B. $\Phi \in \mathring{C}_\infty^q(T_0)$), so gilt dies auch für die Nullfortsetzung ($\Phi \in \mathring{C}_\infty^q(T)$).

2.3 Geometrische Voraussetzungen

Bezeichne $U_N(R)$ die Kugel um den Nullpunkt des \mathbb{R}^N mit Radius R und

$$\begin{aligned} U_N^+(R) &:= \{x \in U_N(R) \mid x_N > 0\} \\ U_N^-(R) &:= \{x \in U_N(R) \mid x_N < 0\} \\ U_N^0(R) &:= \{x \in U_N(R) \mid x_N = 0\} \\ U_N^{0,+}(R) &:= \{x \in U_N^0(R) \mid x_1 > 0\} \\ U_N^{0,-}(R) &:= \{x \in U_N^0(R) \mid x_1 < 0\} \\ U_N^{0,0}(R) &:= \{x \in U_N^0(R) \mid x_1 = 0\} . \end{aligned}$$

Die Sphäre im \mathbb{R}^N mit Radius R nennen wir $S_N(R)$. Im Falle $R = 1$ verzichten wir auf die Angabe des Radius.

Definition 2.1

- i) Ist ∂S eine $(N-1)$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von M , und existiert um jedes $x \in \partial S$ eine "Randkarte", das ist eine Karte (V, h) für M mit

$$\left. \begin{aligned} h(x) &= 0 \\ h(\overline{V}) &= \overline{U_N} \\ h(\partial S \cap V) &= U_N^0 \\ h(S \cap V) &= U_N^- , \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

so nennen wir S glatt.

- ii) Wir sagen S besitzt die Segmenteigenschaft, falls um jedes $x \in \partial S$ eine Karte (V, h) für M , ein $\rho \in (0, 1)$ und ein Vektor $y \in \mathbb{R}^N$ existieren mit

$$\left. \begin{aligned} h(\overline{V}) &= \overline{U_N} \\ (U_N(\rho) \cap \overline{h(S \cap V)}) + \tau y &\subset h(S \cap V) \text{ für alle } \tau \in (0, 1) . \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Definition 2.2

Sei $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \subset M \times M \times M$. Wir sagen $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$, falls Γ_1 und Γ_2 relativ offene Teilmengen in ∂S sind und die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \cap \Gamma_2 &= \emptyset \\ \partial \Gamma_1 = \partial \Gamma_2 &=: \gamma \\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \gamma &= \partial S \text{ disjunkt} \end{aligned}$$

besitzen. Die Menge γ nennen wir Trennmeng.

Definition 2.3

Sei $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$ und bezeichne γ die Trennmeng.

- i) Ist S glatt, so heißt (S, Γ_1, Γ_2) Gebiet mit Übergangsrand.

- ii) Ist zusätzlich γ eine $(N-2)$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von ∂S , und existiert um jedes $x \in \gamma$ eine "glatte Übergangsrandkarte" (V, h) für M mit (26) und

$$\left. \begin{aligned} h(\Gamma_1 \cap V) &= U_N^{0,-} \\ h(\Gamma_2 \cap V) &= U_N^{0,+} \\ h(\gamma \cap V) &= U_N^{0,0} , \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

so heißt (S, Γ_1, Γ_2) glatt.

- iii) Ein Gebiet (S, Γ_1, Γ_2) mit Übergangsrand heißt S -Gebiet (Segment-Gebiet), wenn für ein $j \in \{1, 2\}$ und um jedes x aus der Trennmeng eine Übergangsrandkarte (V, h) mit (26), ein Vektor $y \in \mathbb{R}^N$ und ein $\rho \in (0, 1)$ existieren mit

$$(U_N(\rho) \cap \overline{h(\Gamma_j \cap V)}) + \tau y \subset h(\Gamma_j \cap V) \text{ für alle } \tau \in (0, 1) . \quad (29)$$

Bemerkung 2.4

Erfüllt (S, Γ_1, Γ_2) die Bedingungen in Definition 2.3, iii) mit $j = 1$ und dem Vektor y , so auch für $j = 2$ mit dem Vektor $-y$. Daher ist die Bezeichnung S -Gebiet unabhängig von j in (29).

Wir fassen die oben gemachten Definitionen zusammen und sammeln Eigenschaften der in dieser Arbeit betrachteten Mengen S :

Um jeden Punkt $x \in S$ bzw. $y \in \Gamma_i$ ($i = 1, 2$) bzw. $z \in \gamma$ existiert eine Karte (V, h) mit x bzw. y bzw. $z \in V$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\partial S \cap V = \emptyset$ für Karten (V, h) um $x \in S$ und $\overline{S} \cap V \subset S \cup \Gamma_i$ für Karten um $y \in \Gamma_i$ gilt. Im ersten Fall nennen wir (V, h) eine interne Karte, im zweiten Fall eine interne Randkarte und im dritten Fall ($z \in \gamma$) eine Übergangsrandskarte. Letztere beiden nennen wir gemeinsam Randkarten. Da S kompakt ist, genügt eine endliche Kollektion $\{(V_k, h_k) \mid k = 1, \dots, K\}$ von Karten, um \overline{S} mit $\{V_k \mid k = 1, \dots, K\}$ zu überdecken. Hierzu sei $\{\xi_k \mid k = 1, \dots, K\}$ eine untergeordnete Zerlegung der 1. Wir können o.B.d.A. weiter annehmen, daß stets

$$h_k(V_k) = U_N(0, 1) \quad \text{und} \quad \text{supp } \xi_k \circ h_k^{-1} \subset U_N(0, \frac{1}{3}) \cap \overline{h_k(S \cap V_k)} \quad (30)$$

für alle k erfüllt sind. Je nach Regularität der Geometrie unterscheiden wir drei Typen von Daten:

- i) Glatte Gebiete mit glattem Übergangsrandsrand: Hier haben die internen Randkarten die Eigenschaft (26) und die Übergangsrandskarten die Eigenschaft (28).
- ii) S -Gebiete: Interne Randkarten haben die Eigenschaft (26), während Übergangsrandskarten die Eigenschaft (29) haben.
- iii) Z -Gebiete (werden in Abschnitt 3 definiert)
- iv) Gebiete, an deren Rand wir keine Voraussetzungen stellen möchten: Von den Karten (V, h) fordern wir lediglich $h : \overline{V} \rightarrow \overline{U_N}$.

2.4 Die Sobolevräume H_m^q

Mit den oben erwähnten Karten (V_k, h_k) , $k = 1, \dots, K$ definieren wir für $m \in [0, \infty)$ die Sobolevräume $H_m^q(S)$ als die Menge der Formen $E \in A^q(S)$ mit

$$\|E\|_{H_m^q(S)} := \left(\sum_{k=1}^K \sum_{I \in S(q, N)} \|E_I^k\|_{H_m(h_k(S \cap V_k))}^2 \right)^{1/2} < \infty, \quad (31)$$

wobei E_I^k die Komponenten von $(h_k^{-1})^*E$ bzgl. kartesischer Koordinaten sind (nach unserer Konvention identifizieren wir hier die Form E mit ihrer Einschränkung auf $S \cap V_k$). Aus den Transformationssätzen, (23) für Formen und [37, Satz 4.1] im skalaren Fall, folgt, daß die Definition unabhängig von der gewählten Überdeckung ist und verschiedene Überdeckungen äquivalente Normen liefern. Ebenso entnehmen wir (23), daß für einen Diffeomorphismus $\tau : T \rightarrow S$ und $E \in H_m^q(S)$

$$c' \|E\|_{H_m^q(S)} \leq \|\tau^* E\|_{H_m^q(T)} \leq c \|E\|_{H_m^q(S)} \quad (32)$$

mit von E unabhängigen Konstanten $c, c' > 0$ erfüllt ist. Die Vollständigkeit wird ebenso auf $H_m^q(S)$ übertragen wie folgende Aussagen:

$$C_\infty^q(S) \cap H_m^q(S) \quad \text{dicht in } H_m^q(S) \quad (33)$$

$$\mathring{C}_\infty^q(S) \quad \text{dicht in } H_0^q(S) \quad (34)$$

$$\bigwedge_{\Phi \in C_\infty^p(\overline{S})} \bigvee_{c > 0} \bigwedge_{E \in H_m^q(S)} \|\Phi \wedge E\|_{H_m^{q+p}(S)} \leq c \|E\|_{H_m^q(S)} \quad (35)$$

$$\bigvee_{c > 0} \bigwedge_{E \in H_m^q(S)} \|\ast E\|_{H_m^{N-q}(S)} \leq c \|E\|_{H_m^q(S)} \quad (36)$$

Wir zeigen nur (33). Zerlegen wir die Form $E \in H_m^q(S)$ in $\sum_{k=1}^K \xi_k E$, so genügt es, $\xi_k E$ durch Elemente aus $C_\infty^q(S) \cap H_m^q(S)$ zu approximieren, wobei $\{\xi_k \subset C_\infty(\overline{S})\}$ die der Überdeckung $\{V_k\}$ untergeordnete Zerlegung der 1 ist. Wir setzen $U := h_k(S \cap V_k)$. Aus (30) und [37, Satz 3.5] folgt, daß wir die Komponenten $E_I^k \in H_m(U)$ von $(h_k^{-1})^* \xi_k E$ durch Funktionen $\Phi_I^k \in C_\infty(U) \cap H_m(U)$ approximieren können, deren Träger o.B.d.A. kompakt

enthalten ist in $U_N(1/3) \cap U$. Nach (32) konvergiert die Folge $h_k^* \Phi^l$ mit $\Phi^l := \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \Phi_I^l dx^I$ in $H_m^q(S \cap V_k)$ gegen $\xi_k E$. Wegen der Bemerkung nach unserer Konvention liegen die Nullfortsetzungen der Φ^l im Raum $C_\infty^q(S) \cap H_m^q(S)$ und approximieren $\xi_k E$ in $H_m^q(S)$. Mit der gleichen Technik folgt die zweite Behauptung aus den entsprechenden Aussagen über L_2 . Mit

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{J \in \mathcal{S}(p,N)} \Phi_J dx^J \wedge \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} E_I dx^I \right\|_{H_m^{q+p}(U)}^2 &\leq \sum_{J \in \mathcal{S}(p,N)} \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \|\Phi_J E_I\|_{H_m(U)}^2 \\ &\leq c \left\| \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} E_I dx^I \right\|_{H_m(U)}^2 \end{aligned}$$

für Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^N$ und [37, Lemma 3.2] erhalten wir (35). Analog: (36)

Wir definieren (vgl. (34))

$$\begin{aligned} L_2^q(S) &:= H_0^q(S) \\ \langle E, H \rangle_{q,S} &:= \int_S E \wedge * \overline{H} \text{ für } E, H \in L_2^q(S). \end{aligned}$$

Die Normen in $L_2^q(S)$ und $H_0^q(S)$ sind äquivalent. Nach [32] ist $L_2^q(S)$ ein Hilbertraum. In diesem sind die Transformationen ϵ_τ, μ_τ aus (20), (21) zu einem Diffeomorphismus $\tau : S \rightarrow T$ zulässig:

Definition 2.5

Lineare symmetrische gleichmäßig positiv definite und beschränkte Transformationen auf $A^q(x)$ nennen wir zulässig, wenn für alle Karten (V, h) um x die Abbildungen $\epsilon_{I,J}$ mit

$$\epsilon(x) \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \Phi_I(x) dh^I = \sum_{I,J \in \mathcal{S}(q,N)} \epsilon_{I,J}(x) \Phi_J(x) dh^I \quad (37)$$

meßbar sind.

Weitere Eigenschaften übertragen sich, wenn wir an den Rand stärkere Voraussetzungen stellen. Besitzt S Segmenteigenschaft, liefert die gleiche Argumentation wie beim Beweis von (33) mit [37, Satz 3.6]

$$C_\infty^q(\overline{S}) \text{ dicht in } H_m^q(S) \quad (38)$$

und mit [37, Satz 3.7]:

Lemma 2.6

Besitze S die Segmenteigenschaft, und sei T offen mit $S \subset\subset T \subset\subset M$. Ferner sei $\Phi \in H_m^q(T)$ mit $\Phi = 0$ in $T \setminus S$. Dann gilt

$$\Phi \in \overset{\circ}{H}_m^q(S) := \overline{\overset{\circ}{C}_\infty^q(S)}^{H_m^q(S)}.$$

Mit Hilfe der eingeschränkten "Randkarten" können wir den Raum $H_m^q(\partial S)$ einführen. Um Spursätze auf Differentialformen zu übertragen, bringen wir die bekannten Spursätze auf eine geeignetere Form. Mit [37, Satz 8.7] und einem Approximationsargument zeigt man, daß für $m \in \mathbb{N}$ ein linearer stetiger Spuoperator

$$\begin{aligned} t_0 &: \{u \in H_m(U_N^-) \mid \text{supp } u \subset\subset U_N(2/3)\} \\ &\rightarrow \{v \in H_{m-1/2}(U_N^0) \mid \text{supp } v \subset\subset U_N(2/3)\} \end{aligned}$$

existiert mit $t_0 \Phi(x') = \Phi(x', 0)$ für alle $\Phi \in C_m(\overline{U_N^-})$ mit $\text{supp } \Phi \subset\subset U_N(2/3)$, $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Nach Multiplikation mit $\psi \in \overset{\circ}{C}_\infty(U_N(2/3))$, $\psi = 1$ in $U_N(1/3)$ erhalten wir nach [37, Satz 8.8] einen linearen stetigen Fortsetzungsoperator

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0 &: \{u \in H_{m-1/2}(U_N^0) \mid \text{supp } u \subset\subset U_N(1/3)\} \\ &\rightarrow \{v \in H_m(U_N^-) \mid \text{supp } v \subset\subset U_N(2/3)\}. \end{aligned}$$

Es gelten $t_0 \tilde{t}_0 = \text{id}$ und $\tilde{t}_0 \Phi \in \overset{\circ}{C}_m(\overline{U_N^0(2/3)})$ für $\Phi \in \overset{\circ}{C}_m(\overline{U_N^0(1/3)})$. Die letzte Eigenschaft entnimmt man dem Beweis zu [37, Satz 8.8]. Die vorletzte Eigenschaft folgt aus

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\psi\Phi) &= \tilde{T}(\psi)\tilde{T}(\Phi) \\ \tilde{T}(\psi\tilde{Z}\Phi) &= \psi|_{U_N^0(2/3)} \tilde{T}\tilde{Z}\Phi = \Phi \end{aligned}$$

für $\Phi \in H_{m-1/2}(U_N^0)$ mit $\text{supp } \Phi \subset\subset U_N^0(1/3)$, den Spuroperator \tilde{T} und den Fortsetzungsoperator \tilde{Z} aus [37]. Wir können dann zeigen:

Lemma 2.7

Seien S glatt, ι die Inklusion $\partial S \rightarrow M$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein linearer und stetiger Spuroperator $T : H_m^q(S) \rightarrow H_{m-1/2}^q(\partial S)$ mit

$$i) \quad T\Phi = \iota^* \Phi \text{ für alle } \Phi \in C_m^q(\overline{S})$$

$$ii) \quad dT\Phi = Td\Phi \text{ für alle } \Phi \in C_\infty^q(\overline{S}).$$

Beweis: ii) folgt aus i), und wegen (38) genügt es, Linearität und Stetigkeit für Formen Φ aus $C_m^q(\overline{S})$ zu zeigen. Ist (V_k, h_k) eine "Randkarte" (siehe (30)) für S , so ist $(\partial S \cap V_k, \tilde{h}_k)$ eine Karte für ∂S , wobei

$$\tilde{h}_k := \hat{\iota}^{-1} \circ h_k \circ \iota \Rightarrow \iota = h_k^{-1} \hat{\iota} \tilde{h}_k \quad (39)$$

mit $\hat{\iota} : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, $x' \mapsto (x', 0)$. Wir setzen

$$T\Phi := \iota^* \Phi. \quad (40)$$

Da T linear ist, genügt es, die Stetigkeit der Abbildung

$$\Phi \mapsto \iota^* \xi_k \Phi \quad (41)$$

zu untersuchen (ξ_k wie in (30)). Gehört ξ_k zu einer internen Karte, brauchen wir nichts zu zeigen. Für Randkarten folgt aus

$$\begin{aligned} \hat{\iota}^* dx^I &= \begin{cases} dx^I & \text{falls } N \notin I \\ 0 & \text{falls } N \in I \end{cases} \\ \hat{\iota}^* f &= f \circ \hat{\iota} = t_0 f \text{ für } f \in C_m(\overline{U_N^0}), \text{ supp } f \subset\subset U_N(2/3) \end{aligned}$$

und dem skalaren Spursatz die Stetigkeit von $\hat{\iota}$, aus (39) und (32) die Stetigkeit der Abbildung (41). **q.e.d.**

Lemma 2.8

Für $m \in \mathbb{N}$ existiert ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator

$$\tilde{T} : H_{m-1/2}^q(\partial S) \rightarrow H_m^q(S)$$

mit $T\tilde{T} = \text{id}$.

Beweis: Mit \sim bezeichnen wir wieder Einschränkungen auf ∂S bzw. U_N^0 . Wie oben folgt aus dem skalaren Fortsetzungssatz, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{T} &:= \sum_{k=1}^K \tilde{T}_k \\ \tilde{T}_k &:= h_k^* \tilde{t}_0 (\tilde{h}_k^{-1})^* \tilde{\xi}_k \\ \text{mit } \tilde{t}_0 \sum_{I \in S(q, N-1)} \Phi_I dx^I &:= \sum_{I \in S(q, N-1)} (\tilde{t}_0 \Phi_I) dx^I \end{aligned}$$

linear und stetig ist. Für $\Phi \in C_m^q(\partial S)$ erhalten wir mit (39) und $(t_0 \tilde{t}_0) = \text{id}$

$$\begin{aligned} T\tilde{T}_k \Phi &= \iota^* h_k^* \tilde{t}_0 (\tilde{h}_k^{-1})^* \tilde{\xi}_k \Phi \\ &= \tilde{h}_k^* \hat{\iota}^* \tilde{t}_0 (\tilde{h}_k^{-1})^* \tilde{\xi}_k \Phi = \xi_k \Phi, \end{aligned}$$

also auch $T\tilde{T}\Phi = \Phi$. Aus (33) folgt schließlich die Behauptung. **q.e.d.**

Wir können nun den stetigen und linearen Normalenspuoperator

$$\begin{aligned} N := N^q & : H_m^q(S) \longrightarrow H_{m-1/2}^{q-1}(\partial S) \\ E & \longmapsto \sigma_q * T * E \end{aligned} \quad (42)$$

mit der stetigen linearen Rechtsinversen

$$\begin{aligned} \check{N} := \check{N}^q & : H_{m-1/2}^{q-1}(\partial S) \longrightarrow H_m^q(S) \\ E & \longmapsto \kappa_q * \check{T} * E \end{aligned}$$

definieren. Die damit gemachte Behauptung folgt aus

$$*T * \check{T} * \varphi = \kappa_q * T \check{T} * \varphi = \kappa_q \kappa'_{q-1} \varphi \text{ für } \varphi \in H_{m-1/2}^{q-1}(\partial S) .$$

Für $E \in C_\infty^q(\bar{S})$ erfüllt der Normalenspuoperator $\operatorname{div} NE = -N \operatorname{div} E$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} NE &= \sigma'_{q-1} \sigma_q * d * *T * E \\ &= \sigma'_{q-1} * T d * E \\ &= -(-1)^N * T * *d * E \\ &= -N \operatorname{div} E \end{aligned} \quad (43)$$

Testen mit $v \in T^{N-q} \partial S$ liefert $T * \check{T} = 0$. Es folgt

$$T \check{N} = 0 . \quad (44)$$

2.5 Die Räume $R^{q,\Gamma}$ und $D^{q,\Gamma}$

Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} & : C_\infty^q(S) \longrightarrow C_\infty^{q+1}(S) \\ \Phi & \longmapsto d\Phi \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} & : C_\infty^q(S) \longrightarrow C_\infty^{q-1}(S) \\ \Phi & \longmapsto \delta\Phi . \end{aligned} \quad (46)$$

Diese erfüllen für $\Phi \in C_\infty^q(\bar{S})$, $\Psi \in C_\infty^{q+1}(\bar{S})$ nach (12)

$$\begin{aligned} & \langle \Phi, \operatorname{div} \Psi \rangle_{q,S} + \langle \operatorname{rot} \Phi, \Psi \rangle_{q+1,S} \\ &= \int_S \Phi \wedge * \sigma_{q+1} * d * \bar{\Psi} + \int_S d\Phi \wedge * \bar{\Psi} \\ &= (-1)^q \int_S \Phi \wedge d * \bar{\Psi} + \int_S d\Phi \wedge * \bar{\Psi} \\ &= \int_S d(\Phi \wedge * \bar{\Psi}) . \end{aligned} \quad (47)$$

Für eine Teilmenge $\Gamma \subset \partial S$ sei $C_\infty^{q,\Gamma}(\bar{S})$ die Menge der Einschränkungen von Formen aus $C_\infty^q(M)$ auf S , deren Träger einen positiven Abstand zu Γ besitzt. Im Falle $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$ gilt für $\Phi \in C_\infty^{q,\Gamma_1}(\bar{S})$, $\Psi \in C_\infty^{q+1,\Gamma_2}(\bar{S})$ nach (47) und (17)

$$\langle \Phi, \operatorname{div} \Psi \rangle_{q,S} + \langle \operatorname{rot} \Phi, \Psi \rangle_{q+1,S} = 0 . \quad (48)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} R^{q,\Gamma_1}(S) &:= \{E \in L_2^q(S) \mid \bigvee_{F \in L_2^{q+1}(S)} \bigwedge_{\Phi \in C_\infty^{q+1,\Gamma_2}(\bar{S})} \langle E, \operatorname{div} \Phi \rangle_{q,S} = \langle F, \Phi \rangle_{q+1,S}\} \\ D^{q,\Gamma_2}(S) &:= \{E \in L_2^q(S) \mid \bigvee_{G \in L_2^{q-1}(S)} \bigwedge_{\Phi \in C_\infty^{q-1,\Gamma_1}(\bar{S})} \langle E, \operatorname{rot} \Phi \rangle_{q,S} = \langle G, \Phi \rangle_{q-1,S}\} \end{aligned}$$

und setzen $\text{rot } E := -F$ bzw. $\text{div } E := -G$. Als Adjungierte der dicht definierten Operatoren $-\text{div}|_{C_\infty^{q+1,\Gamma_2}(\overline{S})}$ bzw. $-\text{rot}|_{C_\infty^{q-1,\Gamma_1}(\overline{S})}$ sind $\text{rot}|_{R^{q,\Gamma_1}(S)}$ bzw. $\text{div}|_{D^{q,\Gamma_2}(S)}$ wohldefiniert, und aus (48) folgt, daß diese zum einen selbst wieder dicht definiert sind und zum anderen kein Konflikt mit den Definitionen (45) bzw. (46) besteht. Das gleiche gilt dann auch für die Adjungierten, deren Definitionsbereiche wir mit

$$\begin{aligned}\hat{R}^{q,\Gamma_1}(S) &:= D((\text{div}|_{D^{q+1,\Gamma_2}(S)})^*)^* , & \text{rot}|_{\hat{R}^{q,\Gamma_1}(S)} &:= (-\text{div}|_{D^{q+1,\Gamma_2}(S)})^* \\ \hat{D}^{q,\Gamma_2}(S) &:= D((\text{rot}|_{R^{q-1,\Gamma_1}(S)})^*)^* , & \text{div}|_{\hat{D}^{q,\Gamma_2}(S)} &:= (-\text{rot}|_{R^{q-1,\Gamma_1}(S)})^*\end{aligned}$$

bezeichnen wollen. Die Spezialfälle

$$(S, \Gamma_1, \Gamma_2) = (S, \emptyset, \partial S) \text{ bzw. } (S, \Gamma_1, \Gamma_2) = (S, \partial S, \emptyset)$$

liefern die üblichen Räume

$$\begin{aligned}R^q(S) &:= R^{q,\emptyset}(S) , & \overset{\circ}{D}^q(S) &:= \hat{D}^{q,\partial S}(S) , \\ \text{bzw. } D^q(S) &:= D^{q,\emptyset}(S) , & \overset{\circ}{R}^q(S) &:= \hat{R}^{q,\partial S}(S) ,\end{aligned}$$

und auch hier gilt, daß $\text{rot}|_{R^q(S)}$ eine Fortsetzung von $\text{rot}|_{R^{q,\Gamma_1}(S)}$ ist (div analog). Nach den obigen Betrachtungen werden die Räume $R^q(S)$, $\overset{\circ}{R}^q(S)$, $R^{q,\Gamma_1}(S)$ und $\hat{R}^{q,\Gamma_1}(S)$ bzw. $D^q(S)$, $\overset{\circ}{D}^q(S)$, $D^{q,\Gamma_2}(S)$ und $\hat{D}^{q,\Gamma_2}(S)$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle E, H \rangle_{R^q(S)} &:= \langle E, H \rangle_{q,S} + \langle \text{rot } E, \text{rot } H \rangle_{q+1,S} \\ \text{bzw. } \langle E, H \rangle_{D^q(S)} &:= \langle E, H \rangle_{q,S} + \langle \text{div } E, \text{div } H \rangle_{q-1,S} ,\end{aligned}$$

zu Hilberträumen, und es gelten wegen $\text{rot}|_{\hat{R}^{q,\Gamma_1}(S)} = (\text{rot}|_{C_\infty^{q,\Gamma_1}(\overline{S})})^{**}$ (div analog)

$$\hat{R}^{q,\Gamma_1}(S) = \overline{C_\infty^{q,\Gamma_1}(\overline{S})}^{R^q(S)} \quad (49)$$

$$\hat{D}^{q,\Gamma_2}(S) = \overline{C_\infty^{q,\Gamma_2}(\overline{S})}^{D^q(S)} . \quad (50)$$

Aus (13), der Definition von δ , (45), (46), (49) und (50) folgt

Lemma 2.9

Es gelten die Inklusionen

$$\begin{aligned}\text{rot } R^{q,\Gamma_1}(S) &\subset R_0^{q+1,\Gamma_1}(S) , & \text{rot } \hat{R}^{q,\Gamma_1}(S) &\subset \hat{R}_0^{q+1,\Gamma_1}(S) \\ \text{div } D^{q,\Gamma_2}(S) &\subset D_0^{q-1,\Gamma_2}(S) , & \text{div } \hat{D}^{q,\Gamma_2}(S) &\subset \hat{D}_0^{q-1,\Gamma_2}(S).\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt im Raum $R^q(S) \cap D^q(S)$ erklären wir durch

$$\begin{aligned}\langle E, H \rangle_{R^q(S) \cap D^q(S)} &:= \\ &\langle E, H \rangle_{q,S} + \langle \text{rot } E, \text{rot } H \rangle_{q+1,S} + \langle \text{div } E, \text{div } H \rangle_{q-1,S} .\end{aligned}$$

Wir definieren noch

$$\begin{aligned}R_0^q(S) &:= \{E \in R^q(S) \mid \text{rot } E = 0\} , & \overset{\circ}{R}_0^q(S) &:= \overset{\circ}{R}^q(S) \cap R_0^q(S) \\ R_0^{q,\Gamma_1}(S) &:= R^{q,\Gamma_1}(S) \cap R_0^q(S) , & \hat{R}_0^{q,\Gamma_1}(S) &:= \hat{R}^{q,\Gamma_1}(S) \cap R_0^q(S) \\ D_0^q(S) &:= \{E \in D^q(S) \mid \text{div } E = 0\} , & \overset{\circ}{D}_0^q(S) &:= \overset{\circ}{D}^q(S) \cap D_0^q(S) \\ D_0^{q,\Gamma_2}(S) &:= D^{q,\Gamma_2}(S) \cap D_0^q(S) , & \hat{D}_0^{q,\Gamma_2}(S) &:= \hat{D}^{q,\Gamma_2}(S) \cap D_0^q(S)\end{aligned}$$

und sammeln weitere Eigenschaften: Für $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$, $E \in D^{q,\Gamma_1}(S)$ und $\Phi \in C_\infty^{\Gamma_2, N-q+1}(\overline{S})$ gelten

$$\begin{aligned}\langle *E, \text{div } \Phi \rangle_{N-q,S} &= \int_S E \wedge \text{div } \overline{\Phi} = \sigma_{N-q+1} \int_S E \wedge * \text{rot } (*\overline{\Phi}) \\ &= -\sigma_{N-(q-1)} \int_S \text{div } E \wedge **\overline{\Phi} = - \int_S \text{rot } *E \wedge *\overline{\Phi} .\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}E \in D^{q,\Gamma_1}(S) &\Leftrightarrow *E \in R^{N-q,\Gamma_1}(S) \\ E \in R^{q,\Gamma_1}(S) &\Leftrightarrow *E \in D^{N-q,\Gamma_1}(S) ,\end{aligned} \quad (51)$$

wobei sich die anderen Behauptungen analog oder durch Anwenden des Sternoperators ergeben.

Für $\Phi \in C_\infty^q(S)$ und $\varphi \in C_\infty(S)$ können wir den Ausdruck $\text{rot}(\varphi\Phi)$ bilden und erhalten mit (12)

$$\text{rot}(\varphi\Phi) = \text{rot} \varphi \wedge \Phi + \varphi \text{rot} \Phi . \quad (52)$$

Erfüllt $\varphi(*\Phi)$ mit genügend glattem $\Phi \in A^q(S)$ und $\varphi \in C_\infty(S)$ die Formel (52), so gilt

$$\text{div}(\varphi\Phi) = \sigma_q * (\text{rot} \varphi \wedge *\Phi) + \varphi \text{div} \Phi . \quad (53)$$

Dies impliziert:

Lemma 2.10

Seien $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$ und $\varphi \in C_\infty^{0, \Gamma_2}(\overline{S})$. Dann gelten

$$\begin{aligned} i) \quad E \in R^{q, \Gamma_1}(S) &\Rightarrow \varphi E \in R^{q, \partial S}(S) \\ \text{rot}(\varphi E) &= \text{rot} \varphi \wedge E + \varphi \text{rot} E \\ \bigvee_{c>0} \|\varphi E\|_{R^q(S)} &\leq c \|E\|_{R^q(S)} \\ ii) \quad E \in D^{q, \Gamma_1}(S) &\Rightarrow \varphi E \in D^{q, \partial S}(S) \\ \text{div}(\varphi E) &= \sigma_q * (\text{rot} \varphi \wedge *E) + \varphi \text{div} E \\ \bigvee_{c>0} \|\varphi E\|_{D^q(S)} &\leq c \|E\|_{D^q(S)} , \end{aligned}$$

wobei die Konstante c nur von den Schranken für φ und den ersten Ableitungen von φ abhängt.

Beweis: Um i) zu zeigen, wählen wir $q \in \{1, \dots, N\}$, $\Phi \in C_\infty^{q+1}(\overline{S})$ und erhalten mit $\varphi\Phi \in C_\infty^{q, \Gamma_2}(\overline{S})$ nach (53)

$$\begin{aligned} \langle \varphi E, \text{div} \Phi \rangle_{q, S} &= \langle E, \varphi \text{div} \Phi \rangle_{q, S} \\ &= \langle E, \text{div}(\varphi\Phi) \rangle_{q, S} - \sigma_{q+1} \langle E, *(\text{rot} \varphi \wedge *\Phi) \rangle_{q, S} \\ &= - \langle \text{rot} E, \varphi\Phi \rangle_{q+1, S} - \sigma_{q+1} \int_S E \wedge **(\text{rot} \varphi \wedge *\Phi) . \end{aligned}$$

Das Integral formen wir weiter um:

$$\begin{aligned} \int_S E \wedge **(\text{rot} \varphi \wedge *\Phi) &= \kappa_q \int_S E \wedge \text{rot} \varphi \wedge *\Phi \\ &= \sigma_{q+1} \langle \text{rot} \varphi \wedge E, \Phi \rangle_{q+1, S} \end{aligned}$$

Da die Abschätzungen aus (35) und (36) folgen, erhalten wir somit i) für alle q . Im zweiten Fall liegt $*E$ nach (51) in $R^{N-q, \Gamma_1}(S)$. Nach i) erfüllt $*\varphi E = \varphi *E$ die Formel (52), und die Behauptung ii) folgt aus (53) und (51). **q.e.d.**

Besitzt der Träger von $E \in R^{q, \Gamma_1}(S)$ bzw. $E \in D^{q, \Gamma_1}(S)$ zusätzlich positiven Abstand zu Γ_2 , so können wir ein $\chi \in C_\infty^{0, \Gamma_2}(\overline{S})$ finden, mit $\chi(x) = 1$ für $x \in \text{supp } E$. Wegen $E = \chi E$ in S folgt aus Lemma 2.10:

Lemma 2.11

Sei $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$. Ferner besitze der Träger der Form $E \in R^{q, \Gamma_1}(S)$ bzw. $E \in D^{q, \Gamma_1}(S)$ einen positiven Abstand zum Randstück Γ_2 . Dann gilt $E \in R^{q, \partial S}(S)$ bzw. $E \in D^{q, \partial S}(S)$.

Auf $H_m^q(S)$ läßt sich wegen (33) und

$$\bigwedge_{\Phi \in C_\infty^q(S) \cap H_m^q(S)} \|\text{rot} \Phi\|_{H_{m-1}^{q+1}(S)} \leq c \|\Phi\|_{H_m^q(S)}$$

(nach (14), (19) und (32)) die Rotation als stetige Fortsetzung von $\text{rot}|_{C_\infty^q(S) \cap H_m^q(S)}$ erklären, damit auch die Divergenz

$$\text{div} E := \sigma_q * \text{rot} * E .$$

Mit (36) erhalten wir

Lemma 2.12

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{rot} & : H_m^q(S) \rightarrow H_{m-1}^{q+1}(S) \\ \text{div} & : H_m^q(S) \rightarrow H_{m-1}^{q-1}(S) \end{aligned}$$

sind linear und stetig.

Lemma 2.13

Sei $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$. Für einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\tau : S \rightarrow T$, $\epsilon := \epsilon_\tau$ (vgl. (20)) und $\hat{\Gamma}_i := \tau(\Gamma_i)$ gelten für $q = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} i) \quad & E \in R^{q, \hat{\Gamma}_1}(T) \Rightarrow \tau^* E \in R^{q, \Gamma_1}(S) \\ & \text{rot } \tau^* E = \tau^* \text{rot } E \\ & \bigvee_{c>0} \|\tau^* E\|_{R^q(S)} \leq c \|E\|_{R^q(T)} \\ ii) \quad & E \in D^{q, \hat{\Gamma}_1}(T) \Rightarrow \tau^* E \in \epsilon^{-1} D^{q, \Gamma_1}(S) \\ & \text{div } \epsilon \tau^* E = \epsilon \tau^* \text{div } E \\ & \bigvee_{c>0} \|\tau^* E\|_{q,S}^2 + \|\text{div } \epsilon \tau^* E\|_{q-1,S}^2 \leq c \|E\|_{D^q(T)}^2 . \end{aligned}$$

Beweis: Gilt für ausreichend glattes $\Phi \in A^q(T)$

$$\text{rot } \tau^* * \Phi = \tau^* \text{rot } * \Phi , \quad (54)$$

so auch

$$\begin{aligned} \text{div } \epsilon \tau^* \Phi &= \sigma_q \kappa_q * \text{rot } * \tau^* * \Phi = \sigma_q * \tau^* \text{rot } * \Phi \\ &= \sigma_q \kappa_{q-1} * \tau^* * \text{rot } * \Phi \\ &= \epsilon \tau^* \text{div } \Phi . \end{aligned} \quad (55)$$

Aus (19) und (22) folgen für $\Phi \in C_\infty^{q+1, \Gamma_2}(\bar{S})$, $E \in R^{q, \hat{\Gamma}_1}(T)$ und $q = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\tau^{-1}}(\tau^{-1})^* \Phi &\in C_\infty^{q+1, \hat{\Gamma}_2}(\bar{T}) \\ \langle \tau^* E, \text{div } \Phi \rangle_{q,S} &= \int_S \tau^* E \wedge * \text{div } \Phi = \int_T E \wedge (\tau^{-1})^* * \text{div } \Phi \\ &= \int_T E \wedge * \epsilon_{\tau^{-1}}(\tau^{-1})^* \text{div } \Phi = \int_T E \wedge * \text{div } \epsilon_{\tau^{-1}}(\tau^{-1})^* \Phi \\ &= - \int_T \text{rot } E \wedge * \epsilon_{\tau^{-1}}(\tau^{-1})^* \Phi = - \int_T \text{rot } E \wedge (\tau^{-1})^* * \Phi \\ &= - \int_S \tau^* \text{rot } E \wedge * \Phi = - \langle \tau^* \text{rot } E, \Phi \rangle_{q+1,S} . \end{aligned}$$

Da die Abschätzung aus (32) folgt, ist i) für alle q bewiesen. Hiermit und mit (51) erhalten wir

$$\begin{aligned} E \in D^{q, \hat{\Gamma}_1}(T) &\Leftrightarrow *E \in R^{N-q, \hat{\Gamma}_1}(T) \\ &\Leftrightarrow \tau^* * E \in R^{N-q, \Gamma_1}(S) \text{ und } \text{rot } \tau^* * E = \tau^* \text{rot } * E \\ &\Leftrightarrow \epsilon \tau^* E = \kappa_q * \tau^* * E \in D^{q, \Gamma_1}(S) \text{ und } \text{div } \epsilon \tau^* E = \epsilon \tau^* \text{div } E , \end{aligned}$$

wobei die letzte Behauptung aus (55) folgt und die Abschätzung in ii) impliziert.

q.e.d.

Eine besondere Bedeutung haben die Räume R^0 : Für Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^N$ seien $E = e(x) \in R^0(U)$ und $\text{rot } E = F = \sum_{i=1}^N F_i dx^i$ sowie $\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i dx^i \in \mathring{C}_\infty^1(U)$. Nach (15) gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle E, \text{div } \Phi \rangle_{0,U} + \langle F, \Phi \rangle_{1,U} \\ &= \int_U e(x) \text{div } \bar{\Phi}(x) dx + \int_U \vec{F}(x) \cdot \bar{\Phi}(x) dx , \end{aligned}$$

wobei \vec{F} für das aus den Komponenten von F erstellte Feld und \cdot für das innere Produkt in \mathbb{C}^N steht, $\bar{\Phi}$ analog. Der Operator div ist hier im üblichen Sinne zu verstehen. Wir erhalten

$$*D^N(U) = R^0(U) = H_1(U) . \quad (56)$$

2.6 Die Räume $R_{-1/2}^q$ und $D_{-1/2}^q$

Für $m \in (0, \infty)$ bezeichne $H_{-m}^q(S)$ den Dualraum von $\mathring{H}_m^q(S)$ und $\langle \Lambda, \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)}$, $\Lambda \in H_{-m}^q(S)$, $\Phi \in \mathring{H}_m^q(S)$ die Dualität. Für diese und alle weiteren auftretenden Dualitäten fordern wir stets Antilinearität in der zweiten Komponente. Erklären wir Rotation, Divergenz und Sternoperator durch

$$\langle \operatorname{rot} \Lambda, \Phi \rangle_{H_{-(m+1)}^{q+1}(S)} := - \langle \Lambda, \operatorname{div} \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)} \quad \text{für } \Phi \in \mathring{H}_{m+1}^{q+1}(S) \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \Lambda, \Phi \rangle_{H_{-(m+1)}^{q-1}(S)} &:= - \langle \Lambda, \operatorname{rot} \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)} \quad \text{für } \Phi \in \mathring{H}_{m+1}^{q-1}(S) \\ \langle * \Lambda, \Phi \rangle_{H_{-m}^{N-q}(S)} &:= \kappa_q \langle \Lambda, * \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)} \quad \text{für } \Phi \in \mathring{H}_m^{N-q}(S), \end{aligned} \quad (58)$$

so gelten

$$\begin{aligned} \langle * \Lambda, * \Phi \rangle_{H_{-m}^{N-q}(S)} &= \kappa_q \langle \Lambda, * * \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)} = \langle \Lambda, \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)} \\ \langle * * \Lambda, \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)} &= \kappa_q \langle * \Lambda, * \Phi \rangle_{H_{-m}^{N-q}(S)} = \kappa_q \langle \Lambda, \Phi \rangle_{H_{-m}^q(S)} \\ \operatorname{div} \Lambda &= \sigma_q * \operatorname{rot} * \Lambda. \end{aligned} \quad (59)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} R_{-1/2}^q(S) &:= \{ \Lambda \in H_{-1/2}^q(S) \mid \operatorname{rot} \Lambda \in H_{-1/2}^{q+1}(S) \} \\ D_{-1/2}^q(S) &:= \{ \Lambda \in H_{-1/2}^q(S) \mid \operatorname{div} \Lambda \in H_{-1/2}^{q-1}(S) \}, \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{rot} \Lambda \in H_{-1/2}^{q+1}(S)$ bedeutet, daß wir $\operatorname{rot} \Lambda$ stetig auf $H_{-1/2}^{q+1}(S)$ fortsetzen können. Aus (59) folgt

$$R_{-1/2}^q(S) = * D_{-1/2}^{N-q}(S). \quad (60)$$

Führen wir in den Räumen $R_{-1/2}^q$ und $D_{-1/2}^q$ die Normen

$$\begin{aligned} \|\Lambda\|_{R_{-1/2}^q(S)} &= \|\Lambda\|_{H_{-1/2}^q(S)} + \|\operatorname{rot} \Lambda\|_{H_{-1/2}^{q+1}(S)} \\ \|\Lambda\|_{D_{-1/2}^q(S)} &= \|\Lambda\|_{H_{-1/2}^q(S)} + \|\operatorname{div} \Lambda\|_{H_{-1/2}^{q-1}(S)} \end{aligned}$$

ein, so ist die durch (60) induzierte Abbildung isometrisch.

2.7 Approximationseigenschaften

Dem Abschnitt 2.5 können wir entnehmen, daß stets $\hat{R}^{q,\Gamma_1}(S) \subset R^{q,\Gamma_1}(S)$ erfüllt ist. In diesem Abschnitt wollen wir Kriterien für die Gleichheit finden. Dies ist nach (49) gleichbedeutend mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen wir Formen aus $R^{q,\Gamma_1}(S)$ durch Folgen von Formen aus $C_\infty^{q,\Gamma_1}(\bar{S})$ approximieren können.

Für Formen $E \in R^q(U)$ mit $\operatorname{supp} E \subset \subset U$ können wir durch Anwendung von Mollifiern (vgl. [1, Theorem 2.1]) die Existenz von Folgen $(\Phi_n) \subset \mathring{C}_\infty^q(U)$ zeigen mit

$$\Phi_n \rightarrow E \text{ in } R^q(U). \quad (61)$$

Daraus folgen Approximationseigenschaften weiterer Räume, wenn wir an U strengere Voraussetzungen stellen:

Lemma 2.14

Besitzt S die Segmenteigenschaft, so gilt

$$R^q(S) = \overline{C_\infty^q(\bar{S})}^{R^q(S)}.$$

Beweis: Diese Aussage können wir mit der gleichen Technik beweisen wie die entsprechende Aussage in den skalaren Sobolevräumen (siehe [1, Theorem 2.1]). **q.e.d.**

Hat S Segmenteigenschaft, so folgt daraus

$$R^{q,\partial S}(S) = \hat{R}^{q,\partial S}(S) = \mathring{R}^q(S). \quad (62)$$

Wir erhalten weiter:

Lemma 2.15

Besitze S die Segmenteigenschaft. Seien ferner $\Gamma_1 \subset \partial S$ offen und $E \in R^q(S)$ mit $\text{dist}(\text{supp } E, \Gamma_1) > 0$. Dann gilt

$$E \in \hat{R}^{q, \Gamma_1}(S) .$$

Beweis: Wir wählen $\chi \in C_\infty^{0, \Gamma_1}(\bar{S})$ mit $\chi = 1$ in $\text{supp } E$ und gemäß Lemma 2.14 eine Folge $(\Phi_n) \subset C_\infty^q(\bar{S})$ mit $\Phi_n \rightarrow E$ in $R^q(S)$. Aus (52) folgt

$$\chi \Phi_n \rightarrow \chi E = E \text{ in } R^q(S)$$

und damit die Behauptung. **q.e.d.**

Lemma 2.16

Sei $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$. Ferner existiere ein $i \in \{1, 2\}$, so daß

$$\bigwedge_{q \in \mathbb{Z}} R^{q, \Gamma_i}(S) = \hat{R}^{q, \Gamma_i}(S) \text{ oder } \bigwedge_{q \in \mathbb{Z}} D^{q, \Gamma_i}(S) = \hat{D}^{q, \Gamma_i}(S)$$

erfüllt ist. Dann gelten für alle i und alle q

$$i) \quad R^{q, \Gamma_i}(S) = \hat{R}^{q, \Gamma_i}(S)$$

$$ii) \quad D^{q, \Gamma_i}(S) = \hat{D}^{q, \Gamma_i}(S) .$$

Beweis: Gelte $R^{q, \Gamma_1}(S) = \hat{R}^{q, \Gamma_1}(S)$ für alle q . Aus $E \in D^{q, \Gamma_1}(S)$ und (51) folgt $*E \in R^{N-q, \Gamma_1}(S)$, und wir finden eine Folge $(\Phi_n) \subset C_\infty^{N-q, \Gamma_1}(\bar{S})$, die $*E$ in $R^{N-q}(S)$ approximiert. Wir erhalten $\kappa_q * \Phi_n \in C_\infty^{q, \Gamma_1}(\bar{S})$ und mit (36)

$$\begin{aligned} \|\text{div } E - \text{div } (\kappa_q * \Phi_n)\|_{q-1, S} &= \|\text{rot } *E - \text{rot } \Phi_n\|_{N-q+1, S} \longrightarrow 0 \\ \|E - \kappa_q * \Phi_n\|_{q, S} &= \|\kappa_q * E - \Phi_n\|_{N-q, S} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$, also $D^{q, \Gamma_1}(S) = \hat{D}^{q, \Gamma_1}(S)$ für alle q .

Somit gibt es zu jedem $H \in D^{q+1, \Gamma_1}(S)$ eine Folge $(H_k) \subset C_\infty^{q+1, \Gamma_1}(\bar{S})$, die in $D^{q+1}(S)$ gegen H konvergiert. Für $E \in R^{q, \Gamma_2}(S)$ folgt

$$\begin{aligned} \langle E, \text{div } H \rangle_{q, S} &\leftarrow \langle E, \text{div } H_k \rangle_{q, S} \\ &= - \langle \text{rot } E, H_k \rangle_{q+1, S} \\ &\rightarrow - \langle \text{rot } E, H \rangle_{q+1, S} , \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} \hat{R}^{q, \Gamma_2}(S) &= R^{q, \Gamma_2}(S) \\ \hat{D}^{q, \Gamma_2}(S) &= D^{q, \Gamma_2}(S) . \end{aligned}$$

Analog kann man die Behauptungen unter den anderen Voraussetzungen zeigen. **q.e.d.**

Definition 2.17

Gebiete (S, Γ_1, Γ_2) , welche die Voraussetzung von Lemma 2.16 erfüllen, nennen wir D -Gebiete und schreiben $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}_D(M)$.

Bemerkung 2.18

Aus Lemma 2.13 folgt, daß D -Gebiete durch Diffeomorphismen wieder auf D -Gebiete abgebildet werden.

Lemma 2.19

Seien $U \subset \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ und

$$\eta_s := \eta_{s, y} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x \longmapsto x + sy .$$

Ferner sei $s_0 > 0$ und $E \in R^q(U)$ mit $\eta_s^* E \in R^q(U)$ für alle $s \in [0, s_0]$. Dann ist die Abbildung

$$[0, s_0] \rightarrow R^q(U) , \quad s \mapsto \eta_s^* E$$

stetig in 0.

Beweis: Wegen $\text{rot } \eta_s^* E = \eta_s^* \text{rot } E$ genügt es, $\|E - \eta_s^* E\|_{q,U} < \epsilon$ für s klein zu zeigen. Da aber für Koordinaten $z_i := (x + sy)_i$ nach dem Transformationssatz $\eta_s^* dz^i = dx^i$ gilt, folgt die Behauptung aus (31) und der Stetigkeit der Verschiebung in $L_2(\mathbb{R}^N)$. **q.e.d.**

Satz 2.20

Sei $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$ ein S -Gebiet. Dann gelten für $i = 1, i = 2$ und alle q

$$i) \quad R^{q, \Gamma_i}(S) = \hat{R}^{q, \Gamma_i}(S)$$

$$ii) \quad D^{q, \Gamma_i}(S) = \hat{D}^{q, \Gamma_i}(S) .$$

Beweis: Nach Lemma 2.16 brauchen wir nur i) mit $i = 1$ zu zeigen. Wir benutzen (29) für $j = 2$ (vgl. Bemerkung 2.4). Es genügt eine Form $E \in R^{q, h(\Gamma_1 \cap V)}(h(S \cap V))$ für Karten (V, h) mit $\text{supp } E \subset \subset U_N(1/3)$ durch Formen Φ aus $C_\infty^{q, h(\Gamma_1 \cap V)}(\overline{h(S \cap V)})$ mit $\text{supp } \Phi \subset \subset U_N$ zu approximieren. Nach Multiplikation mit $\zeta \in \mathring{C}_\infty(U_N)$, $\zeta = 1$ in $U_N(1/3)$ folgt dies für innere Karten aus (61) und für interne Randkarten mit $\partial S \cap V \subset \Gamma_2$ aus Lemma 2.15, mit $\partial S \cap V \subset \Gamma_1$ aus Lemma 2.11 und (62). Seien nun ρ, y wie in (29), $\gamma_i := h(\Gamma_i \cap V)$ und $\eta_s := \eta_{s, -y}$. Nach den Lemmata 2.19 und 2.13 gilt für vorgegebenes ϵ und s klein

$$\begin{aligned} \|\eta_s^* E - E\|_{R^q(U_N^-)} &\leq \frac{\epsilon}{2} \\ \text{supp } \eta_s^* E &\subset \subset U_N(2/3) \cap \overline{h(S \cap V)} \\ \eta_s^* E &\in R^{q, \gamma_1, s}(U_N^-) , \end{aligned} \tag{63}$$

wobei $\gamma_{i,s} := (\gamma_i + sy) \cap U_N^0$. Wegen $\text{dist}(\gamma_1, \gamma_{2,s}) > 0$ existiert $\chi \in C_\infty^{\gamma_2, s}(\overline{U_N^-})$ mit $1 - \chi \in C_\infty^{\gamma_1}(\overline{U_N^-})$. Wir erhalten mit Lemma 2.15

$$(1 - \chi)\eta_s^* E \in \hat{R}^{q, \gamma_1}(U_N^-)$$

und mit (63), Lemma 2.11, und (62)

$$\chi \eta_s^* E \in \mathring{R}^q(U_N^-) .$$

Wir können also bis auf eine Genauigkeit von $\epsilon/4$ die Summanden $(1 - \chi)\eta_s^* E$ durch Formen aus $C_\infty^{q, \gamma_1}(\overline{U_N^-})$ und $\chi \eta_s^* E$ durch Formen aus $\mathring{C}_\infty^q(\overline{U_N^-})$ approximieren. Die Multiplikation mit ζ (siehe oben) liefert die Behauptung. **q.e.d.**

2.8 Kegelspitzen

Für Elemente $(B, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}(S_N)$ sei

$$\begin{aligned} C_R(B) &:= \{rm \mid r \in (0, R), m \in B\} \\ C_R(B, \gamma_1, \gamma_2) &:= (C_R(B), C_R(\gamma_1), C_R(\gamma_2)) . \end{aligned}$$

Im Falle $R = 1$ verzichten wir auf den Index R .

Wir wollen die Wirkung von Rotation und Divergenz auf den Tangential- bzw. Normalenanteil von Formen auf Mengen $C_R(B)$ untersuchen. Dazu zitieren wir zunächst einige Resultate aus [33]:

Aus einer Koordinatenabbildung $\varphi : V \subset S_N \rightarrow U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ erhalten wir durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \tilde{V} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \times U \subset \mathbb{R}^N \\ rt &\longmapsto (r, u(t)) \end{aligned}$$

eine Koordinatenabbildung für $\tilde{V} := \{rt \mid r \in \mathbb{R}^+, t \in V\} \subset \mathring{\mathbb{R}}^N := \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Ist $\{\Psi_1(t)du^1, \dots, \Psi_{N-1}(t)du^{N-1}\}$ eine Orthonormalbasis für $A^1(t)$, so ist

$$\{dr, r\Psi_1(t)du^1, \dots, r\Psi_{N-1}(t)du^{N-1}\}$$

eine Orthonormalbasis für $A^1(rt)$, $rt \in \tilde{V}$. Mit den kartesischen Koordinaten x_i definieren wir

$$X := \sum_{n=1}^N x_n dx^n$$

$$\begin{aligned}
\hat{R} : A^q(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow A^{q+1}(\mathbb{R}^N) \\
E &\longmapsto X \wedge E \\
\hat{T} : A^q(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow A^{q-1}(\mathbb{R}^N) \\
E &\longmapsto \sigma_q * (X \wedge *E) \\
m : A^q(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow A^q(\mathbb{R}^N) \\
E &\longmapsto |x| \cdot E .
\end{aligned}$$

Für Formen $E \in A^q(\mathbb{R}^N)$ und $H \in A^{q-1}(\mathbb{R}^N)$ gelten dann

$$\begin{aligned}
E \wedge * \hat{R} H &= \kappa_q(*E) \wedge (X \wedge H) \\
&= \sigma_q X \wedge (*E) \wedge H \\
&= \hat{T} E \wedge * H
\end{aligned} \tag{64}$$

$$(\hat{R} \hat{T} + \hat{T} \hat{R}) E = m^2 E . \tag{65}$$

$$\mathrm{dr} = m^{-1} X \text{ für } r(x) := |x|$$

Eine Form $E \in A^q(\mathring{\mathbb{R}}^N)$ zerlegen wir eindeutig gemäß

$$E = \mathrm{dr} \wedge E^\rho + E^\tau, E^\rho := m^{-1} \hat{T} E, E^\tau := m^{-2} \hat{T} \hat{R} E \tag{66}$$

in ihren Tangential- und Normalenanteil. Dies induziert die surjektiven Abbildungen

$$\begin{aligned}
\rho &:= \rho^q : A^q(\mathring{\mathbb{R}}^N) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, A^{q-1}(S_N)) \\
\tau &:= \tau^q : A^q(\mathring{\mathbb{R}}^N) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, A^q(S_N)) ,
\end{aligned}$$

die lokal durch (vgl. (66))

$$\begin{aligned}
[\rho E(r)](t) &:= r^{-(q-1)} \sum_{I \in \mathcal{S}(q-1, N-1)} c_I^\rho(r, t) \Psi_I(t) \mathrm{d}u^I \\
\text{für } E^\rho &= \sum_{I \in \mathcal{S}(q-1, N-1)} c_I^\rho(r, t) \Psi_I(t) \mathrm{d}u^I \\
[\tau E(r)](t) &:= r^{-q} \sum_{I \in \mathcal{S}(q, N-1)} c_I^\tau(r, t) \Psi_I(t) \mathrm{d}u^I \\
\text{für } E^\tau &= \sum_{I \in \mathcal{S}(q, N-1)} c_I^\tau(r, t) \Psi_I(t) \mathrm{d}u^I
\end{aligned}$$

definiert sind und Rechtsinverse $\check{\rho} := \check{\rho}^q, \check{\tau} := \check{\tau}^q$ besitzen mit

$$\begin{aligned}
\rho \check{\rho} &= \text{id in } \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, A^{q-1}(S_N)) \\
\tau \check{\tau} &= \text{id in } \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, A^q(S_N)) \\
\check{\rho} \rho + \check{\tau} \tau &= \text{id in } A^q(\mathring{\mathbb{R}}^N) \\
\rho \check{\tau} &= 0, \tau \check{\rho} = 0, \check{\rho}_{q+1} = \mathrm{dr} \wedge \check{\tau}_q .
\end{aligned}$$

Weitere Resultate aus [33] können wir, teils aufgrund ihrer lokalen Eigenschaften, teils durch Multiplikation mit charakteristischen Funktionen, auf unsere Situation übertragen: Für offene Teilmengen $B \subset S_N$ und $I := (0, R)$ sei $\mathcal{L}^q := \mathcal{L}_R^q$ die Menge der Bochner-meßbaren Funktionen $f \in \mathcal{F}(I, L_2^q(B))$ mit $\langle f, f \rangle_{\mathcal{L}^q} < \infty$, wobei

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{L}^q} := \int_0^R r^{N-1} \langle u(r), v(r) \rangle_{q, B} \mathrm{d}r .$$

Die Abbildungen

$$\begin{aligned}
\rho &: L_2^q(C_R(B)) \longrightarrow \mathcal{L}^{q-1} \\
\tau &: L_2^q(C_R(B)) \longrightarrow \mathcal{L}^q \\
\check{\rho} &: \mathcal{L}^{q-1} \longrightarrow L_2^q(C_R(B)) \\
\check{\tau} &: \mathcal{L}^q \longrightarrow L_2^q(C_R(B))
\end{aligned} \tag{67}$$

sind stetig, die letzten beiden sogar isometrisch. Die Zerlegung

$$L_2^q(C_R(B)) = \check{\rho}L_2^q(C_R(B)) \oplus \check{\tau}L_2^q(C_R(B)) \quad (68)$$

ist orthogonal. Wir definieren

$$L_{2,N}(I) := \{u \text{ meßbar} \mid \|u\|_{L_{2,N}(I)} := \int_I r^{N-1}|u(r)|^2 dr < \infty\}$$

und folgern aus dem Satz von Fubini:

Lemma 2.21

Konvergiert im Raum $L_2^q(B)$ eine Folge E_k gegen E , so konvergiert für alle φ aus $L_{2,N}(I)$ die Folge φE_k in \mathcal{L}^q gegen φE .

Seien Rot bzw. Div die Rotation bzw. Divergenz auf der Einheitssphäre und

$$\hat{M}\Psi(r) := r\Psi(r) \text{ , } D\Psi(r) := \partial_r\Psi(r)$$

für genügend glattes $\Psi \in \mathcal{L}^q$. Dann gelten für $\Phi \in C_\infty^q(Z)$

$$\left. \begin{aligned} \rho \operatorname{div} \Phi &= -\hat{M}^{-1} \operatorname{Div} \rho \Phi \\ \tau \operatorname{div} \Phi &= \hat{M}^{-(N-q)} D \hat{M}^{N-q} \rho \Phi + \hat{M}^{-1} \operatorname{Div} \tau \Phi \\ \rho \operatorname{rot} \Phi &= -\hat{M}^{-1} \operatorname{Rot} \rho \Phi + \hat{M}^{-q} D \hat{M}^q \tau \Phi \\ \tau \operatorname{rot} \Phi &= \hat{M}^{-1} \operatorname{Rot} \tau \Phi . \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Wir erhalten:

Lemma 2.22

Seien $R \in (0, \infty)$, $I := (0, R)$, $(B, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}(S_N)$, $(Z, \Gamma_1, \Gamma_2) := C(B, \gamma_1, \gamma_2)$ und $\varphi \in \mathring{C}_\infty(I)$. Ferner besitze B die Segmenteigenschaft. Dann gelten

i) für $H \in \hat{D}^{q,\Gamma_2}(Z)$ und $e \in R^{q-1,\gamma_1}(B)$

$$\begin{aligned} \langle \tau H, \hat{M}^{-1} \varphi \operatorname{Rot} e \rangle_{\mathcal{L}^q} &+ \langle \rho H, \hat{M}^{-(q-1)} D \hat{M}^{q-1} \varphi e \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} \\ &+ \langle \tau \operatorname{div} H, \varphi e \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} = 0 , \end{aligned} \quad (70)$$

ii) für $H \in \hat{D}^{q,\Gamma_2}(Z)$ und $e \in R^{q-2,\gamma_1}(B)$

$$- \langle \rho H, \hat{M}^{-1} \varphi \operatorname{Rot} e \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} + \langle \rho \operatorname{div} H, \varphi e \rangle_{\mathcal{L}^{q-2}} = 0 , \quad (71)$$

iii) für $E \in \hat{R}^{q,\Gamma_1}(Z)$ und $h \in D^{q+1,\gamma_2}(B)$

$$\langle \tau E, \hat{M}^{-1} \varphi \operatorname{Div} h \rangle_{\mathcal{L}^q} + \langle \tau \operatorname{rot} E, \varphi h \rangle_{\mathcal{L}^{q+1}} = 0 , \quad (72)$$

iv) für $E \in \hat{R}^{q,\Gamma_1}(Z)$ und $h \in D^{q,\gamma_2}(B)$

$$\begin{aligned} \langle \tau E, \hat{M}^{-(N-q-1)} D \hat{M}^{N-q-1} \varphi h \rangle_{\mathcal{L}^q} &- \langle \rho E, \hat{M}^{-1} \varphi \operatorname{Div} h \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} \\ &+ \langle \rho \operatorname{rot} E, \varphi h \rangle_{\mathcal{L}^q} = 0 . \end{aligned} \quad (73)$$

Beweis: Wegen der Stetigkeit der Abbildungen τ und ρ genügt es, die Aussagen für $H \in C_\infty^{q,\Gamma_2}(\overline{Z})$ und $E \in C_\infty^{q,\Gamma_1}(\overline{Z})$ zu zeigen. Seien $e_1 \in C_\infty^{q-1,\gamma_1}(\overline{B})$, $e_2 \in C_\infty^{q-2,\gamma_1}(\overline{B})$ und $\tilde{E} = \check{\rho}\varphi e_2 + \check{\tau}\varphi e_1$. Wegen

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(*H \wedge \tilde{E}), \partial Z) > 0$$

können wir unter Erhaltung der Differenzierbarkeit $*H \wedge \tilde{E}$ in $\overline{U_N(R)}$ zu Null fortsetzen, und es gilt dann $\iota^>(*H \wedge \tilde{E}) = 0$ für die Inklusion $\iota : S_N(R) \rightarrow \overline{U_N(R)}$. Aus (25) und (12) folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{U_N(R)} \sigma_q d(*H \wedge \tilde{E}) \\ &= \langle H, \operatorname{rot} \tilde{E} \rangle_{q,Z} + \langle \operatorname{div} H, \tilde{E} \rangle_{q-1,Z} \\ &= \langle \tau H, \tau \operatorname{rot} \tilde{E} \rangle_{\mathcal{L}^q} + \langle \rho H, \rho \operatorname{rot} \tilde{E} \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} \\ &\quad + \langle \tau \operatorname{div} H, \tau \tilde{E} \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} + \langle \rho \operatorname{div} H, \rho \tilde{E} \rangle_{\mathcal{L}^{q-2}} . \end{aligned}$$

Aus (69) folgen mit $e_2 = 0$ bzw. $e_1 = 0$ die Behauptungen i) bzw. ii) im Falle glatter Formen e_1 und e_2 . Andernfalls betrachten wir zunächst den ersten Term in (70). Der lokalen Darstellung der Abbildung τ entnehmen wir

$$\bigvee_{c>0} \bigwedge_{r \in (0,R)} \text{dist}(\text{supp } \tau H(r), \gamma_2) \geq c > 0 .$$

Somit existiert eine Abbildung $\chi \in C_\infty(\overline{B})$ mit

$$\bigwedge_{r \in (0,R)} \chi = 1 \text{ in } \text{supp } \tau H(r) , \text{ dist}(\text{supp } \chi, \gamma_2) > 0 .$$

Wir erhalten

$$\langle \tau H, \hat{M}^{-1} \varphi \text{Rot } e \rangle_{\mathcal{L}^q} = \langle \tau H, \hat{M}^{-1} \varphi \text{Rot } \chi e \rangle_{\mathcal{L}^q} .$$

Aus Lemma 2.11 und (62) folgt, daß wir χe in $R^{q-1}(B)$ durch eine Folge aus $\overset{\circ}{C}_\infty^{q-1}(B) \subset C_\infty^{q-1, \gamma_1}(\overline{B})$ approximieren können. Lemma 2.21 liefert schließlich die Konvergenz im Raum \mathcal{L}^q . Die anderen Terme in (70) sowie die Terme in (71) können wir genauso behandeln.

Im Fall iii) und iv) gehen wir analog vor: Für $h_1 \in C_\infty^{q+1, \gamma_2}(\overline{B})$, $h_2 \in C_\infty^{q, \gamma_2}(\overline{B})$ und $\tilde{H} := \check{\tau} \varphi h_1 + \check{\rho} \varphi h_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tau E, \tau \text{div } \tilde{H} \rangle_{\mathcal{L}^q} + \langle \rho E, \rho \text{div } \tilde{H} \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} \\ &\quad + \langle \tau \text{rot } E, \tau \tilde{H} \rangle_{\mathcal{L}^{q+1}} + \langle \rho \text{rot } E, \rho \tilde{H} \rangle_{\mathcal{L}^q} . \end{aligned}$$

Setzen wir $h_2 = 0$ bzw. $h_1 = 0$, so folgen iii) bzw. iv) im Fall glatter Formen h_1 und h_2 . Das gleiche Argument wie oben liefert dann die Behauptung.

q.e.d.

3 Die kompakte Einbettung

Wir definieren rekursiv die Gebiete, für welche wir die kompakte Einbettung zeigen wollen:

Definition 3.1

Ein S -Gebiet (S, Γ_1, Γ_2) heißt Z -Gebiet in M (zulässig), falls um jedes z aus der Trennmengung γ eine Übergangsrandkarte mit (26) existiert, so daß das Gebiet $(\tilde{S}, \gamma_1, \gamma_2)$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{S} &:= \{x \in S_N \mid x_N < 0\} \\ \gamma_i &= S_N \cap h(\Gamma_i \cap \overline{V}) \\ h(\Gamma_i \cap V) &= \{ts \mid t \in (0, 1), s \in \gamma_i\} \end{aligned}$$

ein Z -Gebiet in S_N ist.

Ein Z -Gebiet $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(S_2)$ ist der untere Halbkreis $S := \{x \in S_2 \mid x_2 < 0\}$ und $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{(1, 0), (-1, 0)\}$. Hier ist die Trennmengung γ leer.

Aus Satz 2.20 folgt, daß Z -Gebiete (S, Γ_1, Γ_2) stets die Approximationseigenschaft $R^{q, \Gamma_1}(S) = \hat{R}^{q, \Gamma_1}(S)$ erfüllen.

Satz 3.2

In Z -Gebieten ist für jede zulässige Transformation ϵ die Einbettung

$$R^{q, \Gamma_1}(S) \cap \epsilon^{-1} D^{q, \Gamma_2}(S) \hookrightarrow L_2^q(S)$$

kompakt.

Um diese Aussage zu beweisen, gehen wir wie in [21] vor und führen eine vollständige Induktion über die Raumdimension durch. Wir werden sehen (Lemma 3.9), daß wir nach den Eigenformen des Maxwelloperators entwickeln können, sofern die Einbettung in Satz 3.2 kompakt ist. Gilt dieses Entwicklungsergebnis in $(N-1)$ -dimensionalen Z -Gebieten (S, γ_1, γ_2) mit $S := \{x \in S_N \mid x_N < 0\}$, so zeigt Lemma 3.11, daß beschränkte Familien aus $\hat{R}^{q, \Gamma_1}(Z) \cap \hat{D}^{q, \Gamma_2}(Z)$ für alle $R < 1$ in $L_2^q(Z_R)$ relativ kompakt sind, wobei $(Z, \Gamma_1, \Gamma_2) = C(S, \gamma_1, \gamma_2)$, $Z_R := C_R(S)$. Nachdem wir in Lemma 3.13 die kompakte Einbettung in eindimensionalen Z -Gebieten gezeigt haben, erhalten wir schließlich durch Lokalisieren die Aussage für N -dimensionale Z -Gebiete (Beweis von Satz 3.2). Zunächst zitieren wir einige Hilfsmittel aus [21]:

Definition 3.3

Seien H_{\pm} zwei Hilberträume mit Normen $|\cdot|_{\pm}$ und Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pm}$.

i) Für zwei dicht definierte Operatoren

$$A_{\pm} : D(A_{\pm}) \subset H_{\pm} \longrightarrow H_{\mp}$$

nennen wir (A_+, A_-) ein *duales Paar* in (H_+, H_-) , falls $A_{\pm}^* = A_{\mp}$.

ii) Ein *duales Paar* (A_+, A_-) hat die *Kompaktheitseigenschaft*, wenn die Einbettungen $D(A_{\pm}) \cap \overline{R(A_{\mp})}$ mit den Graphennormen nach $\overline{R(A_{\mp})}$ mit $|\cdot|_{\pm}$ kompakt sind. Ist nur eine Einbettung kompakt, so hat (A_+, A_-) die *partielle Kompaktheitseigenschaft*.

Lemma 3.4

Für ein *duales Paar* (A_+, A_-) in (H_+, H_-) und topologische Isomorphismen

$$T_{\pm} : \tilde{H}_{\pm} \rightarrow H_{\pm}$$

ist $(T_-^{-1}A_+T_+, T_+^*A_-(T_-^{-1})^*)$ ein *duales Paar* in $(\tilde{H}_+, \tilde{H}_-)$.

Lemma 3.5

Hat das *duale Paar* (A_+, A_-) in (H_+, H_-) die *partielle Kompaktheitseigenschaft*, so hat es auch die *Kompaktheitseigenschaft*, und es gelten:

i) $R(A_{\pm}) = \overline{R(A_{\pm})}$ und $H_{\pm} = N(A_{\pm}) \oplus R(A_{\mp})$.

ii) Es existieren Zahlen $c_{\pm} > 0$ mit

$$\bigwedge_{x \in D(A_{\pm}) \cap R(A_{\mp})} |x|_{\pm} \leq c_{\pm} |A_{\pm}x_{\pm}|_{\mp}.$$

iii) Es existieren Folgen (evtl. auch endliche oder leere Folgen) (λ_k) in $(0, \infty)$ und $(\varphi_k^{\pm}) \subset D(A_{\pm})$ mit

- a) $\lambda_k \rightarrow \infty$ (im Falle einer unendlichen Folge)
- b) $\{\varphi_k^{\pm} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $R(A_{\mp})$
- c) $\langle A_{\pm}\varphi_k^{\pm}, A_{\pm}u \rangle_{\mp} = \lambda_k \langle \varphi_k^{\pm}, u \rangle_{\pm}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $u \in D(A_{\pm})$
- d) $\varphi_k^{\mp} = \lambda_k^{-1/2} A_{\pm}\varphi_k^{\pm}$.

Der einfacheren Lesbarkeit wegen führen wir den auf funktionalanalytischen Grundlagen beruhenden Beweis.

Beweis: Wir setzen

$$\begin{aligned} D_{\pm} &:= D(A_{\pm}), \quad R_{\pm} := R(A_{\pm}), \quad N_{\pm} := N(A_{\pm}), \quad X_{\pm} := D_{\pm} \cap \overline{R_{\mp}} \\ \langle x, y \rangle_{X_{\pm}} &:= \langle A_{\pm}x, A_{\pm}y \rangle_{\mp} + \langle x, y \rangle_{\pm}. \end{aligned}$$

Aus $A_{\pm}^* = A_{\mp}$ folgen die Zerlegungen

$$H_{\pm} = N_{\pm} \oplus \overline{R_{\mp}}. \quad (74)$$

Sei die Einbettung

$$X_+ \hookrightarrow \overline{R_-} \quad (75)$$

kompakt. Finden wir keine Konstante c_+ , so daß die Abschätzung

$$\bigwedge_{x_+ \in X_+} |x_+| \leq c_+ |A_+x_+|_- \quad (76)$$

erfüllt ist, gibt es eine Folge $(x_k^+) \subset X_+$ mit $|x_k^+| = 1$ und $A_+x_k^+ \rightarrow 0$. Diese enthält wegen der kompakten Einbettung (75) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $x_+ \in \overline{R_-}$. Aus der Abgeschlossenheit von A_+ folgt $x_+ \in N_+$. Wegen (74) verschwindet der Grenzwert, im Widerspruch zur Stetigkeit der Norm.

Dies liefert aber auch die Abgeschlossenheit von R_+ : Ist $(y_k^-) \subset R_+$ eine Folge mit Grenzwert y_- in H_- , so existiert o.B.d.A. eine Folge $(x_k^+) \subset X_+$ mit $A_+x_k^+ = y_k^-$. Wegen der Abschätzung (76) und der kompakten Einbettung (75) besitzt (x_k^+) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert x_+ in $\overline{R_-}$. Die Abgeschlossenheit von A_+ impliziert $x_+ \in X_+$ und $A_+x_+ = y_-$. Damit haben wir bis auf $R_- = \overline{R_-}$ die Aussagen i) und ii) im Fall "++" gezeigt.

Nun zu iii): Nach ii) liefert der Satz von Lax–Milgram zu allen $y_+ \in \overline{R_-}$ eine eindeutige Lösung $x_+ \in X_+$ von

$$\bigwedge_{z_+ \in X_+} \langle A_+x_+, A_+z_+ \rangle_- = \langle y_+, z_+ \rangle_+ \quad (77)$$

$$|x_+|_{X_+} \leq c|y_+|_+ . \quad (78)$$

Wegen $D_+ = N_+ \oplus X_+$ gilt (77) für alle $z_+ \in D_+$, und wir erhalten $A_+x_+ \in X_-$ und $A_-A_+x_+ = y_+$. Der Lösungsoperator

$$L : \overline{R_-} \subset H_+ \longrightarrow \overline{R_-} \subset H_+ , \\ y_+ \longmapsto x_+ ,$$

der y_+ die Lösung x_+ von (77) zuordnet, ist nach (78) und Voraussetzung kompakt und erfüllt $N(L) = 0$. Wegen

$$\langle y_+, Ly_+ \rangle_+ = \langle A_-A_+x_+, x_+ \rangle_+ = |A_+x_+|_+^2 \in [0, \infty)$$

für $y_+ \in \overline{R_-}$ und $x_+ = Ly_+$ ist L selbstadjungiert und positiv. Der Spektralsatz liefert eine monoton wachsende (evtl. auch endliche oder leere) Folge $(\lambda_k) \subset (0, \infty)$ und ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_k^+\}$ in $\overline{R_-}$ mit $\lambda_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ (im Falle einer unendlichen Folge) und $L\varphi_k^+ = \lambda_k^{-1}\varphi_k^+$. Für alle $u_+ \in D_+$ gilt

$$\langle A_+\varphi_k^+, A_+u_+ \rangle_- = \langle \lambda_k A_+L\varphi_k^+, A_+u_+ \rangle_- = \lambda_k \langle \varphi_k^+, u_+ \rangle_+ .$$

Wir definieren $\varphi_k^- := \lambda_k^{-1/2} A_+\varphi_k^+ \in X_-$, und erhalten mit $u_- \in D_-$

$$\begin{aligned} A_-\varphi_k^- &= \lambda_k^{1/2} A_-A_+L\varphi_k^+ = \lambda_k^{1/2} \varphi_k^+ \\ \langle A_-\varphi_k^-, A_-u_- \rangle_+ &= \lambda_k^{1/2} \langle \varphi_k^+, A_-u_- \rangle_+ = \lambda_k \langle \varphi_k^-, u_- \rangle_- . \end{aligned}$$

Für $x_- \in R_+$, $x_- = A_+x_+$ mit o.B.d.A. $x_+ \in X_+$ gilt

$$\langle x_-, \varphi_k^- \rangle_- = \langle A_+x_+, \varphi_k^- \rangle_- = \lambda_k^{1/2} \langle x_+, \varphi_k^+ \rangle_+ . \quad (79)$$

Setzen wir $x_- := \varphi_l^-, x_+ := \lambda_l^{-1/2} \varphi_l^+$, so folgt hieraus, daß $\{\varphi_k^-\}$ ein Orthonormalsystem ist. Andererseits impliziert (79) aber auch die Vollständigkeit (wegen der Vollständigkeit von $\{\varphi_k^+\}$ in $\overline{R_-}$). Damit ist iii) gezeigt.

Ist (y_k^-) eine beschränkte Folge in X_- , so besitzt die Folge (x_k^+) mit $A_+x_k^+ = y_k^-$ wegen ii) und der Voraussetzung eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_k^+) bezeichnen. Wir setzen $x = x_k^+ - x_l^+$, y analog und erhalten mit iii) und der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle_- &= \langle y, A_+x \rangle_- \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, \varphi_n^- \rangle_- \cdot \langle \varphi_n^-, A_+x \rangle_- \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, A_+\varphi_n^+ \rangle_- \cdot \langle \varphi_n^+, x \rangle_+ \\ &\leq |x|_+ \cdot |A_-y|_+ \\ &\leq |x_k^+ - x_l^+|_+ \cdot (|A_-y_k^-|_+ + |A_-y_l^-|_+) \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Dies liefert die Kompaktheit der Einbettung $X_- \hookrightarrow R_+$, und analog zum Fall "++" folgen i) und ii) für den Fall "−−". **q.e.d.**

Weitere Resultate aus [21] können wir fast direkt übertragen: In einem Gebiet $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$ bilden die Operatoren

$$\begin{aligned} \text{rot}^q &: R^{q, \Gamma_1}(S) \longrightarrow L_2^{q+1}(S) \\ E &\longmapsto \text{rot } E \\ \text{div}^{q+1} &: \hat{D}^{q+1, \Gamma_2}(S) \longrightarrow L_2^q(S) \\ E &\longmapsto \text{div } E \end{aligned}$$

ein duales Paar in $(L_2^q(S), L_2^{q+1}(S))$. Seien σ, μ, ϵ zulässige Transformationen. Bezeichnen wir mit $L_{2, \mu}^q(S)$ den Raum $L_2^q(S)$, versehen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu, q, S} := \langle \mu \cdot, \cdot \rangle_{q, S}$, so sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \epsilon &: L_2^q(S) \longrightarrow L_2^q(S) \\ E &\longmapsto \epsilon E \\ j_{\sigma, \mu} &: L_{2, \sigma}^q(S) \longrightarrow L_{2, \mu}^q(S) \\ E &\longmapsto E \end{aligned}$$

topologische Isomorphismen und besitzen die Adjungierten

$$\epsilon^* = \epsilon, \quad (j_{\sigma, \mu})^* = j_{\text{id}, \sigma} \sigma^{-1} \mu j_{\mu, \text{id}}.$$

Nach Lemma 3.4 bilden

$$\left. \begin{aligned} &(\text{i div}^q \epsilon j_{\epsilon, \text{id}}, \quad \text{i } j_{\text{id}, \epsilon} \text{rot}^{q-1}) \\ &(\text{i } j_{\text{id}, \mu} \mu^{-1} \text{rot}^q j_{\epsilon, \text{id}}, \quad \text{i } j_{\text{id}, \epsilon} \epsilon^{-1} \text{div}^{q+1} j_{\mu, \text{id}}) \\ &(\text{i rot}^{q+1} \mu j_{\mu, \text{id}}, \quad \text{i } j_{\text{id}, \mu} \text{div}^{q+2}) \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

duale Paare in $(L_{2, \epsilon}^q(S), L_2^{q-1}(S))$, $(L_{2, \epsilon}^q(S), L_{2, \mu}^{q+1}(S))$ bzw. $(L_{2, \mu}^{q+1}(S), L_2^{q+2}(S))$. Aus $H = N(A) \oplus \overline{R(A^*)}$ (orthogonal) für einen dicht definierten Operator $A : H \rightarrow \tilde{H}$ und aus $\epsilon^{-1} \text{div } \hat{D}^{q+1, \Gamma_2}(S) \subset \epsilon^{-1} \hat{D}_0^{q, \Gamma_2}(S)$ (nach (13)) folgt

Lemma 3.6

Es gelten die orthogonalen Zerlegungen

$$\begin{aligned} L_{2, \epsilon}^q(S) &= \epsilon^{-1} \hat{D}_0^{q, \Gamma_2}(S) \oplus \overline{\text{rot } R^{q-1, \Gamma_1}(S)} = R_0^{q, \Gamma_1}(S) \oplus \overline{\epsilon^{-1} \text{div } \hat{D}^{q+1, \Gamma_2}(S)} \\ L_{2, \epsilon}^q(S) &= \overline{\text{rot } R^{q-1, \Gamma_1}(S)} \oplus (\epsilon^{-1} \hat{D}_0^{q, \Gamma_2}(S) \cap R_0^{q, \Gamma_1}(S)) \oplus \overline{\epsilon^{-1} \text{div } \hat{D}^{q+1, \Gamma_2}(S)} \\ L_{2, \mu}^{q+1}(S) &= \hat{D}_0^{q+1, \Gamma_2}(S) \oplus \overline{\mu^{-1} \text{rot } R^{q, \Gamma_1}(S)} = \overline{\text{div } \hat{D}^{q+2, \Gamma_2}(S)} \oplus \mu^{-1} R_0^{q+1, \Gamma_1}(S) \\ L_{2, \mu}^{q+1}(S) &= \overline{\mu^{-1} \text{rot } R^{q, \Gamma_1}(S)} \oplus (\hat{D}_0^{q+1, \Gamma_2}(S) \cap \mu^{-1} R_0^{q+1, \Gamma_1}(S)) \oplus \overline{\text{div } \hat{D}^{q+2, \Gamma_2}(S)}. \end{aligned}$$

Lemma 3.7

Die Kompaktheitseigenschaft der dualen Paare in (80) hängt nicht von ϵ und μ ab.

Beweis: Sei q beliebig. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} A_+ &: j_{\text{id}, \epsilon} \epsilon^{-1} \hat{D}^{q, \Gamma_2}(S) \subset L_{2, \epsilon}^q(S) \longrightarrow L_2^{q-1}(S) \\ E &\longmapsto \text{i div } \epsilon j_{\epsilon, \text{id}} E \\ A_- &: R^{q-1, \Gamma_1}(S) \subset L_2^{q-1}(S) \longrightarrow L_{2, \epsilon}^q(S) \\ E &\longmapsto \text{i } j_{\text{id}, \epsilon} \text{rot } E \end{aligned}$$

wobei wir sowohl hier als auch im folgenden den Index q bzw. $q-1$ bei div bzw. rot wieder fortlassen wollen. Eine in der Graphennorm des Operators A_- beschränkte Folge $(E_k) \subset D(A_-) \cap \overline{R(A_+)}$ ist eine Folge in $R^{q-1, \Gamma_1}(S) \cap \text{div } \hat{D}^{q, \Gamma_2}(S)$, für die der Ausdruck

$$\|E_k\|_{q-1, S} + (\langle \epsilon j_{\text{id}, \epsilon} \text{rot } E_k, j_{\text{id}, \epsilon} \text{rot } E_k \rangle_{\epsilon, q, S})^{1/2} \quad (81)$$

beschränkt ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für den Ausdruck (81) für $\epsilon = \text{id}$ eine Schranke existiert. Damit ist die Frage, ob (E_k) eine in $\overline{R(A_+)} = \text{div } \hat{D}^{q, \Gamma_2}(S)$ konvergente Teilfolge besitzt, unabhängig von ϵ . Lemma 3.5 liefert dann die Kompaktheitseigenschaft für das duale Paar. Analog können wir die anderen dualen Paare behandeln. **q.e.d.**

Lemma 3.8

Seien ϵ, μ zulässig und

$$\begin{aligned} X &:= R^{q, \Gamma_1}(S) \cap \epsilon^{-1} \hat{D}^{q, \Gamma_2}(S) \\ \|E\|_{X, q} &:= \|E\|_{q, S} + \|\operatorname{div} \epsilon E\|_{q-1, S} + \|\operatorname{rot} E\|_{q+1, S} . \end{aligned}$$

Dann sind äquivalent:

- i) Die Einbettung $X \hookrightarrow L_2^q(S)$ ist kompakt.
- ii) Die Einbettungen $\overline{\operatorname{rot} R^{q-1, \Gamma_1}(S) \cap \epsilon^{-1} \hat{D}^{q, \Gamma_2}(S)}$ und $\overline{\epsilon^{-1} \operatorname{div} \hat{D}^{q+1, \Gamma_2}(S) \cap R^{q, \Gamma_1}(S)}$ mit $\|\cdot\|_{X, q}$ nach $L_2^q(S)$ sind kompakt und die Dirichlet–Neumann–Felder $\mathcal{H}^q := R_0^{q, \Gamma_1}(S) \cap \hat{D}_0^{q, \Gamma_2}(S)$ endlich dimensional.

Beweis: Analog zu [21]. Ebenso:

Lemma 3.9

Gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.8 und sei die Einbettung $X \hookrightarrow L_2^q(S)$ kompakt. Dann gibt es ein $N^q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ein bzgl. $\langle \epsilon \cdot, \cdot \rangle_{q, S}$ bzw. $\langle \mu \cdot, \cdot \rangle_{q+1, S}$ vollständiges Orthonormalsystem $\{E_n^q, n \in \mathbb{N}\}$ von $\epsilon^{-1} \hat{D}_0^{q, \Gamma_2}(S)$ bzw. $\{H_n^q, n > N^q\}$ von $\overline{\mu^{-1} \operatorname{rot} R^{q, \Gamma_1}(S)}$ sowie eine Folge $\{\omega_n^q, n > N^q\} \subset (0, \infty)$, $\omega_n^q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ mit

$$\begin{aligned} \text{für } n \leq N^q \quad & E_n^q \in R_0^{q, \Gamma_1}(S) \cap \epsilon^{-1} \hat{D}_0^{q, \Gamma_2}(S) \\ \text{für } n > N^q \quad & (E_n^q, H_n^q) \in R^{q, \Gamma_1}(S) \times \hat{D}^{q+1, \Gamma_2}(S) \\ & \operatorname{rot} E_n^q + i \omega_n^q \mu H_n^q = 0 \\ & \operatorname{div} H_n^q + i \omega_n^q \epsilon E_n^q = 0 . \end{aligned} \tag{82}$$

Im Falle endlicher oder leerer Orthonormalsysteme sind die Bezeichnungen entsprechend zu ändern.

Letzteres wollen wir so auch ohne weiteren Kommentar in Zukunft handhaben. Treten z.B. Reihen über leere bzw. endliche Orthonormalsysteme auf, so sind diese durch 0 bzw. Summen zu ersetzen.

Wir bereiten das folgende Lemma vor und erinnern an die in Abschnitt 2.8 eingeführten Bezeichnungen. Seien $\mathcal{S} := (\tilde{S}, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}_D(S_N)$ und $Z := C_R(\mathcal{S})$ für ein $R \in (0, \infty)$. Gelte ferner für \mathcal{S} , $\epsilon = \operatorname{id}$, $\mu = \operatorname{id}$ und alle q die Aussage von Lemma 3.9. Wir zerlegen $E \in \hat{R}^{q, \Gamma_1}(Z) \cap \hat{D}^{q, \Gamma_2}(Z)$ nach (68) orthogonal in $E = \check{\rho} \rho E + \check{\tau} \tau E$. Nach Lemma 3.6 und Voraussetzung (beachte $\mathcal{S} \in \mathcal{M}_D(S_N)$) können wir $\rho E(r)$ und $\tau E(r)$ in Fourierreihen entwickeln, so daß

$$\begin{aligned} E &= \check{\rho} \sum_{n \geq 1} a_n(r) E_n^{q-1} + \check{\rho} \sum_{n > N^{q-2}} b_n(r) H_n^{q-2} \\ &\quad + \check{\tau} \sum_{n \geq 1} c_n(r) E_n^q + \check{\tau} \sum_{n > N^{q-1}} d_n(r) H_n^{q-1} \end{aligned} \tag{83}$$

mit

$$\begin{aligned} a_n(r) &:= \langle \rho E(r), E_n^{q-1} \rangle_{q-1, \tilde{S}} & b_n(r) &:= \langle \rho E(r), H_n^{q-2} \rangle_{q-1, \tilde{S}} \\ c_n(r) &:= \langle \tau E(r), E_n^q \rangle_{q, \tilde{S}} & d_n(r) &:= \langle \tau E(r), H_n^{q-1} \rangle_{q, \tilde{S}} . \end{aligned} \tag{84}$$

(Diese Definitionen gelten nur für solche n , für die die zweite Komponente im Skalarprodukt erklärt ist; vgl. Lemma 3.9). Analog:

$$\begin{aligned} a_n^D(r) &:= \langle \rho \operatorname{div} E(r), E_n^{q-2} \rangle_{q-2, \tilde{S}} & b_n^D(r) &:= \langle \rho \operatorname{div} E(r), H_n^{q-3} \rangle_{q-2, \tilde{S}} \\ c_n^D(r) &:= \langle \tau \operatorname{div} E(r), E_n^{q-1} \rangle_{q-1, \tilde{S}} & d_n^D(r) &:= \langle \tau \operatorname{div} E(r), H_n^{q-2} \rangle_{q-1, \tilde{S}} \\ a_n^R(r) &:= \langle \rho \operatorname{rot} E(r), E_n^q \rangle_{q, \tilde{S}} & b_n^R(r) &:= \langle \rho \operatorname{rot} E(r), H_n^{q-1} \rangle_{q, \tilde{S}} \\ c_n^R(r) &:= \langle \tau \operatorname{rot} E(r), E_n^{q+1} \rangle_{q+1, \tilde{S}} & d_n^R(r) &:= \langle \tau \operatorname{rot} E(r), H_n^q \rangle_{q+1, \tilde{S}} \end{aligned} \tag{85}$$

Wir definieren $l_2(\rho, R)$ als den Raum der Folgen (u_n) meßbarer Funktionen mit

$$\begin{aligned} r^\rho |u_n|^2 &\in L_1(0, R) \\ \|(u_n)\|_{l_2(\rho, R)} &:= \left(\sum_n \int_0^R r^\rho |u_n(r)|^2 dr \right)^{1/2} < \infty . \end{aligned}$$

Versehen mit

$$\langle (u_n), (v_n) \rangle_{l_2(\rho, R)} := \sum_n \int_0^R r^\rho u_n(r) \overline{v_n(r)} dr ,$$

wird dieser zu einem Hilbertraum. Treffen wir zusätzlich die Konvention, daß die Folgen aus l_2 je nach Kontext bei 1 oder $N^q + 1$ usw. starten (vgl. wieder Lemma 3.9), so sind die Abbildungen

$$\left. \begin{array}{llll} A & : & l_2(N-1, R) & \rightarrow \mathcal{L}^{q-1} , & (a_n) & \rightarrow \sum_{n \geq 1} a_n(r) E_n^{q-1} \\ B & : & l_2(N-1, R) & \rightarrow \mathcal{L}^{q-1} , & (b_n) & \rightarrow \sum_{n > N^{q-2}} b_n(r) H_n^{q-2} \\ C & : & l_2(N-1, R) & \rightarrow \mathcal{L}^q , & (c_n) & \rightarrow \sum_{n \geq 1} c_n(r) E_n^q \\ D & : & l_2(N-1, R) & \rightarrow \mathcal{L}^q , & (d_n) & \rightarrow \sum_{n > N^{q-1}} d_n(r) H_n^{q-1} \end{array} \right\} \quad (86)$$

wohldefiniert und isometrisch. Letzteres folgt z.B. für die Abbildung A aus

$$\begin{aligned} \|A(a_n)\|_{\mathcal{L}^{q-1}}^2 &= \int_0^R r^{N-1} \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 dr \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_0^R r^{N-1} |a_n|^2 dr \\ &= \| (a_n) \|_{l_2(N-1, R)}^2 . \end{aligned} \quad (87)$$

Lemma 3.10

Für das Gebiet $\mathcal{S} := (\tilde{S}, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}_D(S_N)$, $\epsilon = \text{id}$, $\mu = \text{id}$ und alle q gelte die Aussage von Lemma 3.9. Sei ferner $(Z, \Gamma_1, \Gamma_2) := C_R(\mathcal{S})$ für ein $R \in (0, \infty)$. Dann erfüllen die Koeffizienten von $E \in \hat{R}^{q, \Gamma_1}(Z) \cap \hat{D}^{q, \Gamma_2}(Z)$ aus (84) und (85) (sofern definiert)

$$\begin{aligned} b_m(r) &= -i(\omega_m^{q-2})^{-1} r a_m^D(r) \\ (r^{N-q} b_m(r))' &= r^{N-q} d_m^D(r) \\ c_m(r) &= i(\omega_m^q)^{-1} r d_m^R(r) \\ (r^q c_m(r))' &= r^q a_m^R(r) \\ (r^q d_m(r))' &= -i\omega_m^{q-1} r^{q-1} a_m(r) + r^q b_m^R(r) \\ (r^{N-q} a_m(r))' &= r^{N-q} c_m^D(r) + \begin{cases} i\omega_m^{q-1} r^{N-q-1} d_m(r) & \text{für } m > N^{q-1} \\ 0 & \text{für } m \leq N^{q-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis: Für $\psi \in \mathring{C}_\infty(I)$ gilt nach (82) und (71)

$$\begin{aligned} \int_0^R r^{N-1} b_m(r) \psi(r) dr &= \langle (b_m), (\bar{\psi} \delta_{nm}) \rangle_{l_2(N-1, R)} \\ &= \langle \rho E, \bar{\psi} H_m^{q-2} \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} \\ &= -i(\omega_m^{q-2})^{-1} \langle \rho E, \text{Rot} \bar{\psi} E_m^{q-2} \rangle_{\mathcal{L}^{q-1}} \\ &= -i(\omega_m^{q-2})^{-1} \langle \rho \text{div } E, \hat{M} \bar{\psi} E_m^{q-2} \rangle_{\mathcal{L}^{q-2}} \\ &= -i(\omega_m^{q-2})^{-1} \int_0^R r^{N-1} r a_m^D(r) \psi(r) dr . \end{aligned}$$

Analog erhalten wir mit (70) bis (73)

$$\begin{aligned} \int_0^R r^{N-1} b_m(r) r^{-(q-1)} (r^{q-1} \psi(r))' dr &= - \int_0^R r^{N-1} d_m^D(r) \psi(r) dr \\ \int_0^R r^{N-1} c_m(r) \psi(r) dr &= i(\omega_m^q)^{-1} \int_0^R r^{N-1} r d_m^R(r) \psi(r) dr \\ \int_0^R r^{N-1} c_m(r) r^{-(N-q-1)} (r^{N-q-1} \psi(r))' dr &= - \int_0^R r^{N-1} a_m^R(r) \psi(r) dr \\ \int_0^R r^{N-1} d_m(r) r^{-(N-q-1)} (r^{N-q-1} \psi(r))' dr &= \\ &= i\omega_m^{q-1} \int_0^R r^{N-1} r^{-1} a_m(r) \psi(r) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^R r^{N-1} b_m^R(r) \psi(r) dr \\
& \int_0^R r^{N-1} a_m(r) r^{-(q-1)} (r^{q-1} \psi(r))' dr \\
& = - \int_0^R r^{N-1} c_m^D(r) \psi(r) dr \\
& + \begin{cases} 0 & \text{für } m \leq N^{q-1} \\ -i \omega_m^{q-1} \int_0^R r^{N-1} r^{-1} d_m(r) \psi(r) dr & \text{für } m > N^{q-1} \end{cases} .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 3.11

Für das Gebiet $\mathcal{S} := (\tilde{S}, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}_D(S_N)$ und alle q gelte die Aussage von Lemma 3.9 im Falle $\epsilon = \text{id}$, $\mu = \text{id}$. Seien ferner $(Z, \Gamma_1, \Gamma_2) := C(\mathcal{S})$ und $\{E^\alpha\}$ eine beschränkte Familie in $\hat{R}^{q, \Gamma_1}(Z) \cap \hat{D}^{q, \Gamma_2}(Z)$. Dann ist für alle $R < 1$ die Familie $\{E^\alpha\}$ in $L_2^q(Z_R)$ relativ kompakt, wobei $Z_R := C_R(\tilde{S})$.

Beweis: Wegen der Isometrie der Abbildungen A, B, C, D in (86) und $\tilde{\tau}, \tilde{\rho}$ in (67) sind die Bildmengen von $\tilde{\rho}A, \dots, \tilde{\tau}D$ abgeschlossen. Wenn wir zeigen, daß für alle $R < 1$ die Familien $\{a_m^\alpha\}, \dots, \{d_m^\alpha\}$ der Koeffizienten von E^α aus (84) in $l_2(N-1, R)$ relativ kompakt sind, so gilt dies auch für deren Bilder $\{\tilde{\rho}A(a_m^\alpha)\}, \dots, \{\tilde{\tau}D(d_m^\alpha)\}$ in $L_2^q(Z_R)$. Aus (83) folgt dann die Behauptung.

i) Wir betrachten zunächst die Koeffizienten b_m^α und definieren

$$\begin{aligned}
\gamma &:= -N + 2q - 1, \quad \mu_m := \omega_m^{q-2}, \\
u_m^\alpha(r) &:= r^{N-q} b_m^\alpha(r) \\
f_m^\alpha(r) &:= r^{N-q} d_m^{D, \alpha}(r) .
\end{aligned}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned}
\|(u_m^\alpha)\|_{l_2(\gamma, 1)} &= \|(b_m^\alpha)\|_{l_2(N-1, 1)} \leq \|E^\alpha\|_{q, Z} \leq c \\
\|(f_m^\alpha)\|_{l_2(\gamma, 1)} &= \|(d_m^{D, \alpha})\|_{l_2(N-1, 1)} \leq \|\text{div } E^\alpha\|_{q-1, Z} \leq c . \\
\sum_{m > N^{q-2}} \int_0^1 \mu_m r^\gamma |u_m^\alpha(r)|^2 dr &= \sum_{m > N^{q-2}} \int_0^1 (\omega_m^{q-2})^{-1} r^{N+1} |a_m^D(r)|^2 dr \\
&\leq \sup_{m > N^{q-2}} \{(\omega_m^{q-2})^{-1}\} \sum_{m > N^{q-2}} \int_0^1 r^{N-1} |a_m^D(r)|^2 dr \\
&\leq c ,
\end{aligned}$$

wobei wir Lemma 3.10 und

$$\|(b_m^\alpha)\|_{l_2(N-1, 1)} \leq \|\rho E^\alpha\|_{\mathcal{L}^{q-1}} \leq \|E^\alpha\|_{q, Z}$$

(nach (87) und (67)) investiert haben. Die Abschätzung für f_m^α folgt analog. Nach Lemma 3.10 und [32, Lemma 8] besitzt $(u_m^\alpha)_\alpha$ eine in $l_2(\gamma, 1)$ und damit auch $(b_m^\alpha)_\alpha$ eine in $l_2(N-1, 1)$ konvergente Teilfolge.

ii) Die Koeffizienten c_m^α können wir mit $\gamma := N - 2q - 1$, $u_m^\alpha(r) := r^q c_m^\alpha(r)$, $f_m^\alpha(r) := r^q a_m^{R, \alpha}(r)$ und

$$\mu_m := \begin{cases} 0 & \text{für } m \leq N^q \\ \omega_m^q & \text{für } m > N^q \end{cases}$$

analog behandeln und gewinnen somit eine in $l_2(N-1, 1)$ konvergente Teilfolge von $(c_m^\alpha)_\alpha$.

iii) Für $m > N^{q-1}$ definieren wir $\gamma := N - 2q - 1$, $\beta_m := \omega_m^{q-1}$ und

$$\begin{aligned}
u_m^\alpha(r) &:= r^q d_m^\alpha(r) , \quad v_m^\alpha(r) := i r^{q-1} a_m^\alpha(r) \\
f_m^\alpha(r) &:= r^q b_m^{R, \alpha}(r) , \quad g_m^\alpha(r) := i r^{q+1} c_m^{D, \alpha}(r) .
\end{aligned}$$

Diese erfüllen

$$\begin{aligned}
\|(u_m^\alpha)\|_{l_2(\gamma, 1)} &= \|(d_m^\alpha)\|_{l_2(N-1, 1)} \leq c , \\
\|(v_m^\alpha)\|_{l_2(\gamma+2, 1)} &= \|(a_m^\alpha)\|_{l_2(N-1, 1)} \leq c , \\
\|(f_m^\alpha)\|_{l_2(\gamma, 1)} &= \|(b_m^{R, \alpha})\|_{l_2(N-1, 1)} \leq c , \\
\|(g_m^\alpha)\|_{l_2(\gamma-2, 1)} &= \|(c_m^{D, \alpha})\|_{l_2(N-1, 1)} \leq c .
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.10 gelten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
(u_m^\alpha)'(r) &= (r^q d_m^\alpha(r))' = -i \omega_m^{q-1} r^{q-1} a_m^\alpha(r) + r^q b_m^{R,\alpha}(r) \\
&= -\beta_m v_m^\alpha(r) + f_m^\alpha(r) \\
r^{-\gamma} (r^{\gamma+2} v_m^\alpha)'(r) &= r^{-(N-2q-1)} (i r^{N-q} a_m^\alpha(r))' \\
&= -\omega_m^{q-1} r^q d_m^\alpha(r) + i r^{q+1} c_m^{D,\alpha}(r) \\
&= -\beta_m u_m^\alpha(r) + g_m^\alpha(r) .
\end{aligned}$$

Nach [32, Lemma 9] enthält $(u_m^\alpha)_\alpha$ bzw. $(v_m^\alpha)_\alpha$ für alle $R < 1$ eine in $l_2(\gamma, R)$ bzw. $l_2(\gamma + 2, R)$ konvergente Teilfolge. Das gleiche gilt dann auch für $((\text{id} - \Pi_{N^{q-1}})(a_m^\alpha))_\alpha$ bzw. $(d_m^\alpha)_\alpha$ in $l_2(N - 1, R)$, wobei

$$\begin{aligned}
\Pi_K : l_2(\gamma, R) &\longrightarrow l_2(\gamma, R) \\
(w_n) &\longmapsto (\hat{w}_n) \quad , \quad \text{mit } \hat{w}_n := \begin{cases} w_n & \text{für } n \leq K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Für $m \leq N^{q-1}$ definieren wir (vgl. i)) $\gamma := -N + 2q - 1$ und

$$\begin{aligned}
u_m^\alpha(r) &:= \begin{cases} r^{N-q} a_m^\alpha(r) & \text{für } n \leq N^{q-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
f_m^\alpha(r) &:= \begin{cases} r^{N-q} c_m^{D,\alpha}(r) & \text{für } n \leq N^{q-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\mu_m &:= \begin{cases} 0 & \text{für } n \leq N^{q-1} \\ m & \text{sonst} \end{cases} .
\end{aligned}$$

Nach [32, Lemma 8] enthält $(u_m^\alpha)_\alpha$, somit auch $(\Pi_{N^{q-1}} a_m^\alpha)_\alpha$ eine konvergente Teilfolge. **q.e.d.**

Lemma 3.12

Die Kompaktheit der Einbettung in Satz 3.2 ist unabhängig von ϵ , μ und invariant unter Diffeomorphismen.

Beweis: Die erste Aussage folgt wie in [21] aus Lemma 3.8, Lemma 3.7 und einer Überlegung, analog zu [20, Remark 2]. Die zweite Aussage ist dann eine Konsequenz aus der ersten und Lemma 2.13. **q.e.d.**

Lemma 3.13

In eindimensionalen Z -Gebieten (S, Γ_1, Γ_2) gelten $R^{q,\Gamma_1}(S) = \hat{R}^{q,\Gamma_1}(S)$ und die Aussage von Satz 3.2.

Beweis: Nach Lemma 3.12 und der Bemerkung 2.18 genügt es, statt eindimensionaler Z -Gebiete Intervalle zu betrachten und $\epsilon = \text{id}$ anzunehmen. Die erste Behauptung folgt dann mit einer geeigneten Abschneidefunktion aus den entsprechenden Aussagen für $\mathring{H}_1(S)$ und $H_1(S)$. Für die zweite Behauptung definieren wir den Raum $Y^q := R^{q,\Gamma_1}(S) \cap D^{q,\Gamma_2}(S)$. Aus (56) folgt $Y^0, *Y^1 \subset H_1(S)$, und der Rellichsche Auswahlssatz liefert das Gewünschte. **q.e.d.**

Beweis von Satz 3.2. Es genügt wieder $\epsilon = \text{id}$ anzunehmen. Wir führen eine Induktion über die Raumdimension durch. Den Induktionsanfang entnehmen wir Lemma 3.13. Gelte der Satz für $(N - 1)$ -dimensionale Z -Gebiete. Für eine Karte (V, h) und eine in $R^{q,h(\Gamma_1 \cap V)}(h(S \cap V)) \cap D^{q,h(\Gamma_2 \cap V)}(h(S \cap V))$ beschränkte Familie $\{E^\alpha\}$ mit kompaktem Träger in $U_N(1/3) \cap \overline{h(S \cap V)}$ genügt es nach Lemma 3.12 und (30) zu zeigen, daß für ein $R \in (1/3, 1)$ die Familie $\{E^\alpha\}$ in $L_2^q(U_N(R) \cap \overline{h(S \cap V)})$ relativ kompakt ist.

Für innere Karten folgt dies direkt aus [32]. Für eine Randkarte existiert nach Definition 3.1 ein Z -Gebiet $\mathcal{S} = (\tilde{S}, \gamma_1, \gamma_2)$ mit $(U_N^-, h(\Gamma_1 \cap V), h(\Gamma_2 \cap V)) = \mathcal{C}(\mathcal{S})$. Nach Induktionsannahme hat dieses die Eigenschaft aus Lemma 3.9. Wegen Bemerkung 2.18 und $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}_D(M)$ finden wir Folgen $(\Phi_k^{i,\alpha}) \subset C_\infty^{q,C(\gamma_i)}(\overline{U_N^-})$ mit

$$\begin{aligned}
\Phi_k^{1,\alpha} &\rightarrow E^\alpha \text{ in } R^q(U_N^-) \\
\Phi_k^{2,\alpha} &\rightarrow E^\alpha \text{ in } D^q(U_N^-)
\end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.11 erfüllt. Dies liefert schließlich die Behauptung. **q.e.d.**

Als Folgerung notieren wir

Korollar 3.14

Sei $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}_D(M)$. Ist die Einbettung $R^{q, \Gamma_1}(S) \cap D^{q, \Gamma_2}(S) \hookrightarrow L_2^q(S)$ kompakt (dies ist insbesondere in Z -Gebieten erfüllt), so gelten:

$$i) \bigvee_{c>0} \bigwedge_{\Phi \in (R_0^{q, \Gamma_1}(S) \cap D^{q, \Gamma_2}(S)) \cap (R_0^{q, \Gamma_1}(S) \cap D_0^{q, \Gamma_2}(S))^\perp} \|\Phi\|_{q, S} \leq c \|\operatorname{div} \Phi\|_{q-1, S}$$

$$ii) \bigvee_{c>0} \bigwedge_{\Phi \in (R^{q, \Gamma_1}(S) \cap D_0^{q, \Gamma_2}(S)) \cap (R_0^{q, \Gamma_1}(S) \cap D^{q, \Gamma_2}(S))^\perp} \|\Phi\|_{q, S} \leq c \|\operatorname{rot} \Phi\|_{q+1, S}$$

iii) Die Räume $\operatorname{rot} R^q(S)$ und $\operatorname{div} D^q(S)$ sind abgeschlossen in $L_2^q(S)$.

Beweis: Lemma 3.5.

4 Ein Regularitätssatz

Satz 4.1

Seien S glatt, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, und ϵ eine zulässige $C_{m+1}(\overline{S})$ -Transformation (d.h. ϵ ist zulässig und für alle Karten (V, h) um x sind in der Matrixdarstellung (37) die Einträge $\epsilon_{I, J}(x)$ aus $C_{m+1}(\overline{S} \cap V)$). Ferner erfülle $H \in \overset{\circ}{R}^q(S) \cap \epsilon^{-1} D^q(S)$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &\in H_m^{q+1}(S) \\ \operatorname{div} \epsilon H &\in H_m^{q-1}(S) . \end{aligned}$$

Dann gelten $H \in H_{m+1}^q(S)$ und

$$\bigvee_{c>0} \|H\|_{H_{m+1}^q(S)} \leq c(\|H\|_{q, S} + \|\operatorname{rot} H\|_{H_m^{q+1}(S)} + \|\operatorname{div} \epsilon H\|_{H_m^{q-1}(S)}) .$$

Im Falle $q = 1$, $N = 3$ wurde dies in [30] bewiesen. Wir gehen einen ähnlichen Weg, können jedoch nicht (56) für $(q-1)$ - bzw. $(q+2)$ -Formen benutzen. Wir benötigen einige Vorbereitungen:

Lemma 4.2

Seien $r > 0$, $x' := (x_1, \dots, x_{N-1})$ und

$$\begin{aligned} \tau : U_N^+(r) &\longrightarrow U_N^-(r) \\ x &\longmapsto (x', -x_N) . \end{aligned}$$

Der Spiegelungsoperator

$$\begin{aligned} S_{\operatorname{rot}} : R^q(U_N^-(r)) &\longrightarrow R^q(U_N(r)) \\ H &\longmapsto \begin{cases} H & \text{in } U_N^-(r) \\ \tau^* H & \text{in } U_N^+(r) \end{cases} \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear, stetig und hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} H \subset \overline{U_N^-(r')} &\Rightarrow \operatorname{supp} S_{\operatorname{rot}} H \subset \overline{U_N(r')} \text{ für } r' < r \\ \bigvee_{c>0} \|\operatorname{rot} S_{\operatorname{rot}} H\|_{q+1, U_N(r)} &\leq c \|\operatorname{rot} H\|_{q+1, U_N^-(r)} \\ \operatorname{rot} S_{\operatorname{rot}} H &= \begin{cases} \operatorname{rot} H & \text{in } U_N^-(r) \\ \tau^* \operatorname{rot} H & \text{in } U_N^+(r) \end{cases} . \end{aligned} \tag{88}$$

Beweis: Wegen Lemma 2.14 genügt es, $S_{\operatorname{rot}} H \in R^q(U_N(r))$ sowie (88) für Formen $H \in C_\infty^q(\overline{U_N^-})$ zu zeigen. Die Aussagen über den Träger und die Stetigkeit folgen dann direkt. Seien $U_\pm := U_N^\pm(r)$, $U_0 := U_N^0(r)$, $U := U_N(r)$ und ι_\pm, ι_0 die Einbettungen $U_\pm, U_0 \rightarrow U$. Wir beachten, daß τ die Orientierung verändert und berechnen für $\Phi \in \overset{\circ}{C}_\infty^{q+1}(U)$

$$\begin{aligned} (-1)^q < S_{\operatorname{rot}} H, \operatorname{div} \Phi >_{q, U} &= \int_{U_-} H \wedge \iota_-^* d * \overline{\Phi} + \int_{U_+} \tau^* H \wedge \iota_+^* d * \overline{\Phi} \\ &= \int_{U_-} H \wedge (\iota_-^* d * \overline{\Phi} - (\tau^{-1})^* \iota_+^* d * \overline{\Phi}) \\ &= \int_{U_-} H \wedge d(\iota_-^* * \overline{\Phi} - (\tau^{-1})^* \iota_+^* * \overline{\Phi}) . \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Stokes folgt

$$\begin{aligned} \langle S_{\text{rot}} H, \text{div } \Phi \rangle_{q,U} &= - \int_{U_-} dH \wedge (\iota_-^* * \bar{\Phi} - (\tau^{-1})^* \iota_+^* * \bar{\Phi}) \\ &\quad + \int_{U_0} \iota_0^* H \wedge \iota_0^* (\iota_-^* - (\tau^{-1})^* \iota_+^*) * \bar{\Phi} . \end{aligned}$$

Wegen $\iota_- \circ \iota_0 - \iota_+ \circ \tau^{-1} \circ \iota_0 = 0$ verschwindet das zweite Integral, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle S_{\text{rot}} H, \text{div } \Phi \rangle_{q,U} &= - \left(\int_{U_-} dH \wedge \iota_-^* * \bar{\Phi} + \int_{U_+} \tau^* dH \wedge \iota_+^* * \bar{\Phi} \right) \\ &= - \langle F, \Phi \rangle_{q+1,U} \\ &\quad \text{mit } F := \begin{cases} \text{rot } H & \text{in } U_- \\ \tau^* \text{rot } H & \text{in } U_+ . \end{cases} \end{aligned}$$

q.e.d.

Auf $D^q(U_N^-(r))$ können wir den Spiegelungsoperator mittels

$$S_{\text{div}} H = \kappa_q * S_{\text{rot}} * H$$

erklären. Dieser hat dann die entsprechenden Eigenschaften.

Lemma 4.3

Seien $N \geq 3$ und $r > 0$. Es gibt eine Konstante $c > 0$ und zu jedem $H \in D_0^q(\mathbb{R}^N)$ mit $\text{supp } H \subset U_N(r)$ ein $A \in H_1^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\text{div } A = H , \quad \|A\|_{H_1^{q+1}(\mathbb{R}^N)} \leq c \|H\|_{q,\mathbb{R}^N} .$$

Beweis: Seien x_i und y_i , $i = 1, \dots, N$ kartesische Koordinaten. Wir setzen für $\Phi = \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \Phi_I dx^I \in \mathring{C}_\infty^q(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} F\Phi(x) &:= \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \mathcal{F}_0 \Phi_I(x) dx^I \\ F^{-1}\Phi(y) &:= \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \mathcal{F}_0^{-1} \Phi_I(y) dy^I , \end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{F}_0 \Phi_I(x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i \langle y, x \rangle} \Phi_I(y) dy$$

die Fouriertransformierte von Φ_I ist. Wir erinnern an die Operatoren \hat{R} , \hat{T} und m aus (64). Nach (14) und ([27, Satz 10.5]) gilt

$$F(\text{rot } \Phi) = i \hat{R} F \Phi .$$

Sei nun $H \in D_0^q(\mathbb{R}^N)$ mit $\text{supp } H \subset U_N(r)$. Wegen

$$|\mathcal{F}_0 H_I(x)| \leq \int_{U_N(r)} |H_I(y)| dy \leq c \|H\|_{q,\mathbb{R}^N}$$

(vgl. [27, Satz 10.6]) sind die Komponenten von FH beschränkt. Wir definieren $\hat{A} := -i m^{-2} \hat{R} F H$ (im Nullpunkt sei $\hat{A} = 0$). Aus

$$\begin{aligned} |\hat{A}_J(x)| &= |(|x|^{-2} \sum_{n=1}^N x_n dx^n \wedge \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \mathcal{F}_0 H_I(x) dx^I)_J| \\ &\leq c \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} |x|^{-1} |\mathcal{F}_0 H_I(x)| \end{aligned} \tag{89}$$

folgt, daß \hat{A} und die Transformierte $F^{-1}\hat{A}$ in $L_2^q(\mathbb{R}^N)$ liegen (in einer Nullumgebung schätzen wir den Term $|\mathcal{F}_0 H_I(x)|$, im Komplement den Term $|x|^{-1}$ durch eine Konstante ab). Mit (64) und [27, 10.25] erhalten wir für $\Phi \in \mathring{C}_\infty^{q-1}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}FH, \Phi \rangle_{q-1, \mathbb{R}^N} &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{T}FH \wedge * \overline{\Phi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} FH \wedge * \hat{R}\overline{\Phi} \\ &= \langle H, \text{rot } F^{-1}\Phi \rangle_{q+1, \mathbb{R}^N} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und für $\Phi \in \mathring{C}_\infty^q(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle F^{-1}\hat{A}, \text{rot } \Phi \rangle_{q+1, \mathbb{R}^N} &= - \int_{\mathbb{R}^N} m^{-2} \hat{R}FH \wedge * \hat{R}\overline{\Phi} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} m^{-2} \hat{T}\hat{R}FH \wedge * \overline{F}\overline{\Phi} \\ &= - \langle FH, F\Phi \rangle_{q, \mathbb{R}^N} \\ &= - \langle H, \Phi \rangle_{q, \mathbb{R}^N}, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt (65) benutzt haben. Es folgt $\text{div } F^{-1}\hat{A} = H$. Mit

$$\|x_k \hat{A}\|_{q+1, \mathbb{R}^N} \leq c \|H\|_{q, \mathbb{R}^N}$$

(vgl. (89)) erhalten wir $A := F^{-1}\hat{A} \in H_1^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ und die Abschätzung.

q.e.d.

Zur Vorbereitung des nachfolgenden Lemmas betrachten wir eine Teilmenge U des \mathbb{R}^N . Für eine Form

$$\Phi = \sum_{I \in S(q, N)} \Phi_I dx^I \in L_2^q(U)$$

ist $\Phi = \Phi^\tau + \Phi^\rho$ mit

$$\begin{aligned} \Phi^\tau &:= \sum_{I \in S(q, N-1)} \Phi_I dx^I \\ \Phi^\rho &:= \sum_{I \in S(q, N), N \in I} \Phi_I dx^I \end{aligned}$$

eine orthogonale Zerlegung in $L_2^q(U)$.

Lemma 4.4

Seien $U \subset \mathbb{R}^N$, ϵ eine zulässige $C_1(\overline{U})$ -Transformation und $H \in L_2^q(U)$. Liegen die Ausdrücke $\partial_i H$ und $\partial_i(\epsilon H)$ für $i = 1, \dots, N-1$ sowie $\partial_N H^\tau$ und $\partial_N(\epsilon H)^\rho$ in $L_2^q(U)$, so gilt $H \in H_1^q(U)$.

Hierbei wollen wir die Ableitungen komponentenweise verstehen.

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt $H^\tau \in H_1^q(U)$ und somit auch

$$\partial_N(\epsilon H^\rho)^\rho = \partial_N(\epsilon H)^\rho - \partial_N(\epsilon H^\tau)^\rho \in L_2^q(U).$$

Wir erhalten $(\epsilon H^\rho)^\rho \in H_1^q(U)$. Da die auf dem "Normalenteil" agierende Einschränkung $\epsilon^{\rho, \rho}$ von ϵ punktweise invertierbar mit $C_1(\overline{U})$ Einträgen ist, haben wir das Lemma bewiesen.

q.e.d.

Nun zum Beweis von Satz 4.1. Wir wollen wieder lokalisieren und beschränken uns auf den schwierigeren Fall der Randkarten. Wir definieren $U := U_N^-$ sowie $U(r) := U_N^-(r)$. Für Zahlen $r \in (0, \infty)$ sind nach [32] und Lemma 3.5 die Räume $\text{rot } R^q(U(r))$, $\text{rot } \mathring{R}^q(U(r))$ usw. abgeschlossen. Darüber hinaus gelten die Poincaré Abschätzungen in Lemma 3.14 mit $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in \{(\emptyset, \partial U), (\partial U, \emptyset)\}$. Aus der Segmenteigenschaft folgt dann $R^{q, \partial U}(U) = \mathring{R}^{q, \partial U}(U) = \mathring{R}^q(U)$.

Für eine zulässige $C_{m+1}(\overline{U})$ -Transformation ϵ genügt es zu zeigen

$$\begin{aligned} H &\in H_{m+1}^q(U) \\ \|H\|_{H_{m+1}^q(U)} &\leq c(\|H\|_{q, U} + \|\text{rot } H\|_{H_m^{q+1}(U)} + \|\text{div } \epsilon H\|_{H_m^{q-1}(U)}) \end{aligned} \tag{90}$$

für

$$\begin{aligned} H &\in \overset{\circ}{R}^q(U) \cap \epsilon^{-1} D^q(U) \\ \text{rot } H &\in H_m^{q+1}(U) \\ \text{div } \epsilon H &= H_m^{q-1}(U) \\ \text{supp } H &\subset\subset \overline{U(r)} \text{ für ein } r \in (0, 1) . \end{aligned}$$

Die Transformation ϵ ist im allgemeinen nicht identisch mit ϵ aus Satz 4.1, sondern das Produkt $\epsilon_{h^{-1}} \cdot \epsilon \circ h^{-1}$ für die Karte (V, h) . Auf die Felder $(H_I)_I$ der Komponentenfunktionen wirkt ϵ wie eine symmetrische gleichmäßig positiv definite Matrix mit Einträgen aus $C_{m+1}(\overline{U})$.

Sei zunächst $N \geq 3$. Wir zeigen (90) per Induktion über q und m . Da der Fall $q = 0$ nach (56) schon bewiesen ist, nehmen wir an, die Aussage gelte für $q - 1$. Sei also $m = 0$. Wir wollen zeigen

$$\partial_i(\epsilon H) \in L_2^q(U) \quad (91)$$

$$\|\partial_i \epsilon H\|_{q,U} \leq c(\|H\|_{q,U} + \|\text{div } \epsilon H\|_{q-1,U} + \|\text{rot } H\|_{q+1,U}) \quad (92)$$

für $i = 1, \dots, N - 1$, wobei wir die Ableitung komponentenweise verstehen. Aus Symmetriegründen genügt es, den Fall $i = 1$ zu betrachten. Wir wählen $\Delta \in (0, 1)$ mit $r + 4\Delta < 1$ und setzen $W_j := U(r + j\Delta)$ sowie

$$\begin{aligned} \tau_h : \mathbb{R}_-^N &\longrightarrow \mathbb{R}_-^N \\ x &\longmapsto (x_1 + h, x_2, \dots, x_N) , 0 < |h| < \Delta . \end{aligned}$$

Wegen $dy^i = dx^i$ für $y^i := \tau_{h,i}(x)$ können wir die Koordinaten im Urbild und Zielbereich identifizieren. Somit ist der Ausdruck

$$\delta_h H := \frac{1}{h}(\tau_h^* - \text{id}^*)H$$

wohldefiniert, wirkt auf die Komponenten wie der Differenzenquotient und tauscht mit Rotation, Sternoperator und Divergenz. Weiter gilt für alle $F, G \in L_2^q(U)$ mit Träger in $\overline{W_3}$

$$\begin{aligned} | \langle \delta_h F, G \rangle_{q,U} | &= | \langle F, \delta_{-h} G \rangle_{q,U} | \\ \delta_h \epsilon F &= \epsilon \delta_h F + (\delta_h \epsilon) \tau_h^* F \\ \|(\delta_h \epsilon) \tau_h^* F\|_{q,U} &\leq c \|F\|_{q,U} . \end{aligned} \quad (93)$$

Hierbei sei

$$(\delta_h \epsilon) \Phi(x) := \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \sum_{J \in \mathcal{S}(q,N)} (\delta_h \tilde{\epsilon}_{I,J}(x)) \Phi_J(x) dx^I$$

für $\Phi(x) = \sum_{I \in \mathcal{S}(q,N)} \Phi_I(x) dx^I$ und die oben erwähnten Matrixdarstellung $\tilde{\epsilon}$ von ϵ . Wie in [1, Theorem 3.13] zeigt man für $m \in \mathbb{N}$

$$\bigwedge_{F \in H_m^q(U), \text{ supp } F \subset \overline{W_3}} \|\delta_h F\|_{H_{m-1}^q(U)} \leq \|F\|_{H_m^q(U)} . \quad (94)$$

Die Form H erfüllt

$$\text{supp } \delta_h H \subset\subset \overline{W_1} ,$$

und nach [1, Theorem 3.15] und (93) genügt es, die Abschätzung

$$| \langle \delta_h \epsilon H, \Phi \rangle_{q,W_1} | \leq c(\|H\|_{q,U} + \|\text{div } \epsilon H\|_{q-1,U} + \|\text{rot } H\|_{q+1,U}) \|\Phi\|_{q,W_1}$$

für alle $\Phi \in \overset{\circ}{C}_\infty^q(W_1)$ zu zeigen. In U zerlegen wir gemäß Lemma 3.6

$$\begin{aligned} \Phi &= \hat{\Phi}_1 + \epsilon^{-1} \hat{\Phi}_2 \\ \hat{\Phi}_1 &\in \overset{\circ}{R}_0^q(U) \\ \hat{\Phi}_2 &= \text{div } \Phi_2 , \Phi_2 \in D^{q+1}(U) \cap \text{rot } \overset{\circ}{R}^q(U) \\ \|\Phi_2\|_{D^{q+1}(U)} &\leq c \|\Phi\|_{q,W_1} . \end{aligned} \quad (95)$$

Da alle Betti-Zahlen von U verschwinden, folgt aus [17, Satz 1, Satz 2] und Lemma 3.6

$$\mathring{R}_0^q(U) = \text{rot } (\mathring{R}^{q-1}(U) \cap \text{div } D^q(U)) .$$

Nach Induktionsvoraussetzung erhalten wir (vgl. Lemma 2.10)

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1 &= \text{rot } \Phi_1 , \Phi_1 \in \mathring{R}^{q-1}(U) \cap \text{div } D^q(U) \\ \text{mit } \chi \Phi_1 &\in H_1^{q-1}(U) \\ \|\chi \Phi_1\|_{H_1^{q-1}(U)} &\leq c \|\Phi\|_{q, W_1} \end{aligned} \quad (96)$$

für $\chi \in \mathring{C}_\infty(U_N(r + 2\Delta))$ mit $\chi = 1$ in W_1 .

Die Form $\chi \Phi_2$ hat kompakten Träger in $U \cup U_N^0$. Die Nullfortsetzung von $S_{\text{div}} \chi \Phi_2$ auf \mathbb{R}^N liegt in $D^{q+1}(\mathbb{R}^N)$, und $\tilde{\Phi}_2 := \text{div } S_{\text{div}} \chi \Phi_2$ erfüllt

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2 &= \hat{\Phi}_2 \text{ in } W_1 \\ \text{div } \tilde{\Phi}_2 &= 0 , \text{ supp } \tilde{\Phi}_2 \subset \subset \mathbb{R}^N . \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 existiert $A \in H_1^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\begin{aligned} \text{div } A &= \tilde{\Phi}_2 \\ \|A\|_{H_1^{q+1}(\mathbb{R}^N)} &\leq c \|\tilde{\Phi}_2\|_{q, U_N} \\ &= c \|\text{div } S_{\text{div}} \chi \Phi_2\|_{q, U_N} \\ &\leq c \|\Phi_2\|_{D^{q+1}(U)} \\ &\leq c \|\Phi\|_{q, W_1} . \end{aligned} \quad (97)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} | \langle \delta_h \epsilon H, \Phi \rangle_{q, W_1} | &= | \langle \delta_h \epsilon H, \text{rot } \Phi_1 + \epsilon^{-1} \text{div } A \rangle_{q, U} | \\ &= | \langle \delta_h \epsilon H, \text{rot } \chi \Phi_1 + \epsilon^{-1} \text{div } \chi A \rangle_{q, U} | \\ &= | \langle \epsilon H, \delta_{-h} (\text{rot } \chi \Phi_1 + \epsilon^{-1} \text{div } \chi A) \rangle_{q, U} | \\ &\leq | \langle \epsilon H, \text{rot } \delta_{-h} \chi \Phi_1 \rangle_{q, U} | + | \langle H, \text{div } \delta_{-h} \chi A \rangle_{q, U} | \\ &\quad + | \langle \epsilon H, (\delta_{-h} \epsilon^{-1}) \tau_{-h}^* \text{div } \chi A \rangle_{q, U} | \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 . \end{aligned}$$

Den Term I_3 schätzen wir mit (93) und (97) durch $c \|H\|_{q, W_1} \|\Phi\|_{q, W_1}$ ab. Mit Φ_1 liegt auch $\delta_{-h} \chi \Phi_1$ in $\mathring{R}^{q-1}(U)$. Aus (94) und (96) folgern wir

$$I_1 \leq c \|\text{div } \epsilon H\|_{q-1, W_1} \|\Phi\|_{q, W_1} , \quad (98)$$

mit $\delta_{-h} \chi A \in D^{q+1}(U)$ und $H \in \mathring{R}^q(U)$ aus (94) und (97)

$$I_2 \leq c \|\text{rot } H\|_{q+1, W_1} \|\Phi\|_{q, W_1} .$$

Damit sind (91) und (92) für $i = 1, \dots, N-1$ gezeigt. Die Normalenableitungen erhalten wir wie folgt: Wir wissen für $i = 1, \dots, N-1$

$$\partial_i \epsilon H = \epsilon \partial_i H + (\partial_i \epsilon) H \in L_2^q(U) \quad (99)$$

$$\Rightarrow \partial_i H = \epsilon^{-1} (\partial_i \epsilon H - (\partial_i \epsilon) H) \in L_2^q(U) , i = 1, \dots, N-1 . \quad (100)$$

Nach (14), (15) gelten dann

$$\begin{aligned} \partial_N H_I &= \sigma(N, I) ((\text{rot } H)_{I+N} - \sum_{j \in I} \sigma(j, I+N-j) \partial_j H_{I+N-j}) \\ &\in L_2(U) \text{ für } N \notin I \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} (\partial_N \epsilon H)_I &= \sigma(N, I-N) ((\text{div } \epsilon H)_{I-N} - \sum_{j \notin I} \sigma(j, I) (\partial_j \epsilon H)_{I-N+j}) \\ &\in L_2(U) \text{ für } N \in I . \end{aligned} \quad (102)$$

Aus Lemma 4.4 folgt $H \in H_1^q(U)$. Damit haben wir den Fall $m = 0$ bewiesen. Gelte der Satz für $m - 1$. Aus den Voraussetzungen im Falle m folgt

$$H, \epsilon H \in H_m^q(U) \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \|H\|_{H_m^q(U)} &\leq c(\|H\|_{q,U} + \|\operatorname{rot} H\|_{H_m^{q+1}(U)} + \|\operatorname{div} \epsilon H\|_{H_m^{q-1}(U)}) \\ &=: C_m(H) . \end{aligned} \quad (104)$$

Für einen Differentialoperator $D_m := \partial_1^{m_1} \cdots \partial_{N-1}^{m_{N-1}}$ mit $m = \sum_{j=1}^{N-1} m_j$ wollen wir wie oben zeigen

$$| \langle \delta_h \epsilon D_m H, \Phi \rangle_{q, W_1} | \leq c(\|H\|_{q,U} + \|\operatorname{div} \epsilon H\|_{H_m^{q-1}(U)} + \|\operatorname{rot} H\|_{H_m^{q+1}(U)}) \|\Phi\|_{q, W_1}$$

für alle $\Phi \in \mathring{C}_\infty^q(W_1)$. Mit der gleichen Zerlegung wie zuvor erhalten wir

$$\begin{aligned} | \langle \delta_h \epsilon D_m H, \Phi \rangle_{q, W_1} | &\leq | \langle \epsilon D_m H, \operatorname{rot} \delta_{-h} \chi \Phi_1 \rangle_{q, U} | \\ &\quad + | \langle D_m H, \operatorname{div} \delta_{-h} \chi A \rangle_{q, U} | \\ &\quad + | \langle \epsilon D_m H, (\delta_{-h} \epsilon^{-1}) \tau_{-h}^* \operatorname{div} \chi A \rangle_{q, U} | \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 . \end{aligned}$$

Wegen

$$D_m(\epsilon H) = \epsilon D_m H + r(\epsilon, H) \quad (105)$$

mit einem Ausdruck $r(\epsilon, H) \in H_1^q(U)$, dessen Träger in $\overline{W_0}$ liegt, und der nur Ableitungen von ϵ bis zur Ordnung m und von H bis zur Ordnung $m - 1$ enthält, erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 &\leq | \langle D_m(\epsilon H), \operatorname{rot} \delta_{-h} \chi \Phi_1 \rangle_{q, U} | + | \langle \delta_h r(\epsilon, H), \operatorname{rot} \chi \Phi_1 \rangle_{q, U} | \\ &=: I_{1,1} + I_{1,2} . \end{aligned}$$

Den zweiten Term schätzen wir nach (94), (96) und (104) ab durch

$$\begin{aligned} I_{1,2} &\leq c\|r(\epsilon, H)\|_{H_1^q(U)} \|\Phi\|_{q, W_1} \\ &\leq c\|H\|_{H_m^q(U)} \|\Phi\|_{q, W_1} \\ &\leq cC_m(H) \|\Phi\|_{q, W_1} . \end{aligned}$$

Aus $\operatorname{div} \epsilon H \in H_m^q(U)$ folgt für $\Psi \in \mathring{C}_\infty^{q-1}(U)$

$$\begin{aligned} \langle D_m(\epsilon H), \operatorname{rot} \Psi \rangle_{q, U} &= (-1)^m \langle \epsilon H, D_m \operatorname{rot} \Psi \rangle_{q, U} \\ &= (-1)^m \langle \epsilon H, \operatorname{rot} D_m \Psi \rangle_{q, U} \\ &= (-1)^{m+1} \langle \operatorname{div} \epsilon H, D_m \Psi \rangle_{q, U} \\ &= - \langle D_m \operatorname{div} \epsilon H, \Psi \rangle_{q, U} , \end{aligned}$$

also $\operatorname{div} D_m \epsilon H = D_m \operatorname{div} \epsilon H \in L_2^q(U)$. Wir erhalten wie in (98)

$$I_{1,1} \leq | \langle D_m \operatorname{div} (\epsilon H), \delta_{-h} \chi \Phi_1 \rangle_{q, U} | \leq c\|\operatorname{div} \epsilon H\|_{H_m^{q-1}(U)} \|\Phi\|_{q, W_1} .$$

Genauso verfahren wir mit I_2 :

$$I_2 \leq c\|\operatorname{rot} H\|_{H_m^{q+1}(U)} \|\Phi\|_{q, W_1} .$$

Den letzten Term I_3 können wir wie im Fall $m = 0$ behandeln und erhalten nach entsprechenden Überlegungen für die anderen tangentialen Ableitungen mit (105)

$$\begin{aligned} \partial_i D_m \epsilon H &\in L_2^q(U) \\ \|\partial_i D_m \epsilon H\|_{q, U} &\leq cC_m(H) \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, N - 1$.

Um die Normalenableitungen zu untersuchen, setzen wir für $1 \leq k \leq m$

$$\tilde{H}^k := \partial_N^k \partial^{\alpha_{m-k}} H , \quad |\alpha_j| = j ,$$

wobei α_j nur Tangentialkomponenten enthält. Unter Verwendung von (103) und den Formeln (99) bis (102) können wir induktiv für $k = 1, \dots, m$ die Voraussetzungen von Lemma 4.4 (mit \tilde{H}^k statt H) und damit $\tilde{H}_k \in H_1^q(U)$ zeigen.

Damit ist der Fall $N \geq 3$ bewiesen. In den Fällen $N = 1$, q beliebig und $N = 2$, $q = 0$ oder $q = 2$ ist nichts zu zeigen. Im Fall $N = 2$, $q = 1$ liegt die Form Φ_2 aus (95) wegen (56) in $H_1^2(U)$, so daß wir den Beweis ohne Lemma 4.3 durchführen können. **q.e.d.**

Im Falle wechselnder Randbedingungen würde der Beweis scheitern, da die Anwendung von δ_h die Randbedingungen nicht respektiert.

5 Spursätze

In diesem Kapitel betrachten wir Spuren und Teilspuren der Formen aus R^q und D^q , wobei wir die folgenden Sätze nur für den ersten Raum beweisen werden. Die Behauptungen für den Raum D^q sind die dualen Resultate, die man mit Hilfe des Sternoperators unter Verwendung von (51), (60) und den in diesem Zusammenhang bewiesenen Aussagen gewinnen kann.

5.1 Die Spursätze in R^q und D^q

Sei in diesem Abschnitt S glatt. Aus Satz 4.1 folgt, daß Formen aus $\mathring{R}^q(S) \cap D^q(S)$ in $H_1^q(S)$ liegen, und wir können auf solche die Spurooperatoren T aus Lemma 2.7 und N aus (42) anwenden.

Nach (47) und dem Satz von Stokes gilt für $\Phi \in C_\infty^q(\bar{S})$, $\Psi \in C_\infty^{q+1}(\bar{S})$ und $0 \leq q < N$

$$\begin{aligned} \langle \text{rot } \Phi, \Psi \rangle_{q+1,S} + \langle \Phi, \text{div } \Psi \rangle_{q,S} &= \int_S d(\Phi \wedge * \bar{\Psi}) \\ &= \int_{\partial S} T(\Phi \wedge * \bar{\Psi}) \\ &= \int_{\partial S} T\Phi \wedge \kappa'_q * T * \bar{\Psi} \\ &= \langle T\Phi, N\Psi \rangle_{q,\partial S} . \end{aligned}$$

Mit (38) erhalten wir

$$\bigwedge_{\Phi \in H_1^q(S)} \bigwedge_{\Psi \in H_1^{q+1}(S)} \langle \text{rot } \Phi, \Psi \rangle_{q+1,S} + \langle \Phi, \text{div } \Psi \rangle_{q,S} = \langle T\Phi, N\Psi \rangle_{q,\partial S} . \quad (106)$$

Dies motiviert, die Tangentialspur $\gamma_T E \in H_{-1/2}^q(\partial S)$ einer Form $E \in R^q(S)$ wie folgt zu definieren

$$\bigwedge_{\varphi \in H_{1/2}^q(\partial S)} \langle \gamma_T E, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} := \langle \text{rot } E, \check{N}\varphi \rangle_{q+1,S} + \langle E, \text{div } \check{N}\varphi \rangle_{q,S} . \quad (107)$$

Angewandt auf Formen $E \in H_1^q(S)$ erfüllt diese

$$\bigwedge_{\varphi \in H_{1/2}^q(\partial S)} \langle \gamma_T E, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} = \langle TE, \varphi \rangle_{q,\partial S} .$$

Wir zeigen:

Satz 5.1

Für jedes $E \in R^q(S)$ liegt die Tangentialspur $\gamma_T E$ in $R_{-1/2}^q(\partial S)$ und es gelten:

- i) $\bigwedge_{E \in R^q(S)} \bigwedge_{\Psi \in H_1^{q+1}(S)} \langle \gamma_T E, N\Psi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} = \langle \text{rot } E, \Psi \rangle_{q+1,S} + \langle E, \text{div } \Psi \rangle_{q,S}$
- ii) $\bigwedge_{E \in R^q(S)} \text{rot } \gamma_T E = \gamma_T \text{rot } E$

iii) Die Abbildung $\gamma_T : R^q(S) \rightarrow R_{-1/2}^q(\partial S)$ ist stetig.

Beweis: i) Wegen (106) erfüllen $\Phi \in C_\infty^q(\bar{S})$ und $\Psi \in H_1^{q+1}(S)$

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{rot} \Phi, \check{N} N \Psi \rangle_{q+1, S} &+ \langle \Phi, \operatorname{div} \check{N} N \Psi \rangle_{q, S} \\ &= \langle T \Phi, N \Psi \rangle_{q, \partial S} \\ &= \langle \operatorname{rot} \Phi, \Psi \rangle_{q+1, S} + \langle \Phi, \operatorname{div} \Psi \rangle_{q, S} . \end{aligned}$$

Da $C_\infty^q(\bar{S})$ dicht in $R^q(S)$ liegt, folgt die Behauptung aus (107) .

ii), iii) Für $E \in R^q(S)$ erhalten wir mit (107), der Schwarzschen Ungleichung und der Stetigkeit von \check{N}

$$\begin{aligned} | \langle \gamma_T E, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} | &\leq c \|E\|_{R^q(S)} \|\varphi\|_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ \|\gamma_T E\|_{H_{-1/2}^q(\partial S)} &\leq c \|E\|_{R^q(S)} . \end{aligned} \quad (108)$$

Daraus folgt für $\varphi \in H_{3/2}^{q+1}(\partial S)$ und eine Folge $(E_k) \subset C_\infty^q(\bar{S})$ mit $E_k \rightarrow E$ in $R^q(S)$

$$\begin{aligned} \langle \gamma_T E, \operatorname{div} \varphi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} &\leftarrow \langle \gamma_T E_k, \operatorname{div} \varphi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= \langle T E_k, \operatorname{div} \varphi \rangle_{q, \partial S} \\ &= - \langle \operatorname{rot} T E_k, \varphi \rangle_{q+1, \partial S} \\ &= - \langle T \operatorname{rot} E_k, \varphi \rangle_{q+1, \partial S} \\ &= - \langle \gamma_T \operatorname{rot} E_k, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} \\ &\rightarrow - \langle \gamma_T \operatorname{rot} E, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} , \end{aligned}$$

da $\operatorname{rot} : R^q(S) \rightarrow R^{q+1}(S)$ stetig ist. Nach (57) und (108) gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \gamma_T E &= \gamma_T \operatorname{rot} E \in H_{-1/2}^{q+1}(\partial S) \\ \|\operatorname{rot} \gamma_T E\|_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} &= \|\gamma_T \operatorname{rot} E\|_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} \leq c \|E\|_{R^q(S)} , \end{aligned} \quad (109)$$

und wir erhalten Wohldefiniertheit und Stetigkeit der Abbildung γ_T .

q.e.d.

Wir untersuchen noch die "natürlichen" Eigenschaften des Spuoperators: Für $E \in \mathring{R}^q(S)$ gilt

$$\bigwedge_{\psi \in H_{1/2}^q(\partial S)} \langle \gamma_T E, \psi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} = \langle E, \operatorname{div} \check{N} \psi \rangle_{q, S} + \langle \operatorname{rot} E, \check{N} \psi \rangle_{q+1, S} = 0 .$$

Andererseits zieht $\gamma_T E = 0$ nach sich

$$\bigwedge_{\Phi \in C_\infty^{q+1}(\bar{S})} \langle E, \operatorname{div} \Phi \rangle_{q, S} + \langle \operatorname{rot} E, \Phi \rangle_{q+1, S} = \langle \gamma_T E, N \Phi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} = 0 ,$$

also

$$\gamma_T E = 0 \Leftrightarrow E \in \mathring{R}^q(S) . \quad (110)$$

Mit Hilfe des Sternoperators können wir auf $D^q(S)$ einen Normalenspuoperator erklären:

$$\gamma_N E := \sigma_q * \gamma_T * E .$$

Die Resultate aus Satz 5.1 werden durch den Sternoperator wie folgt übertragen:

Satz 5.2

Für jedes $E \in D^q(S)$ liegt die Normalenspur $\gamma_N E$ in $D_{-1/2}^{q-1}(\partial S)$ und es gelten:

$$i) \quad \bigwedge_{E \in D^q(S)} \bigwedge_{\Phi \in H_1^{q-1}(S)} \langle \operatorname{div} E, \Phi \rangle_{q-1, S} + \langle E, \operatorname{rot} \Phi \rangle_{q, S} = \langle \gamma_N E, T \Phi \rangle_{H_{-1/2}^{q-1}(\partial S)}$$

$$ii) \bigwedge_{E \in D^q(S)} \operatorname{div} \gamma_N E = -\gamma_N \operatorname{div} E$$

iii) Die Abbildung $\gamma_N : D^q(S) \rightarrow D_{-1/2}^{q-1}(\partial S)$ ist stetig.

Wir wollen einen Fortsetzungsoperator $R_{-1/2}^q(\partial S) \rightarrow R^q(S)$ konstruieren und zeigen zunächst:

Lemma 5.3

Für $\varphi \in H_{1/2}^q(\partial S)$ gelten $\check{N}\varphi \in \mathring{R}^{q+1}(S)$ sowie $\check{T}\varphi \in \mathring{D}^q(S)$.

Beweis: Für $\Psi \in C_{\infty}^{q+2}(\overline{S})$ erhalten wir mit (44) und (106)

$$\langle \check{N}\varphi, \operatorname{div} \Psi \rangle_{q+1,S} + \langle \operatorname{rot} \check{N}\varphi, \Psi \rangle_{q+2,S} = \langle T\check{N}\varphi, N\Psi \rangle_{q+1,\partial S} = 0 .$$

und damit die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ist das duale Resultat.

q.e.d.

Satz 5.4

i) Es existiert ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator

$$\check{\gamma}_T : R_{-1/2}^q(\partial S) \rightarrow R^q(S)$$

mit $\gamma_T \check{\gamma}_T = \operatorname{id}$.

ii) Es existiert ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator

$$\check{\gamma}_N : D_{-1/2}^{q-1}(\partial S) \rightarrow D^q(S)$$

mit $\gamma_N \check{\gamma}_N = \operatorname{id}$.

Beweis: i): Seien $\lambda \in R_{-1/2}^q(\partial S)$ und (vgl. Korollar 3.14)

$$\begin{aligned} Y^q &:= \mathring{R}^q(S) \cap D^q(S) \\ Y_1^q &:= Y^q \cap \operatorname{rot} \mathring{R}^{q-1}(S) = \operatorname{rot} \mathring{R}^{q-1}(S) \cap D^q(S) \\ Y_2^q &:= Y^q \cap \operatorname{div} D^{q+1}(S) = \mathring{R}^q(S) \cap \operatorname{div} D^{q+1}(S) \\ Y_3^q &:= Y^q \cap \mathring{R}_0^q(S) \cap D_0^q(S) = \mathring{R}_0^q(S) \cap D_0^q(S) , \end{aligned}$$

versehen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^q(S) \cap D^q(S)}$. Nach Lemma 3.6 mit $\Gamma_1 = \partial S$, $\Gamma_2 = \emptyset$ und Korollar 3.14 gilt

$$Y^q = Y_1^q \oplus Y_2^q \oplus Y_3^q$$

orthogonal in $L_2^q(S)$, und nach Satz 4.1 liegen alle Räume in $H_1^q(S)$. Wir betrachten das Problem (P1): Gesucht $W \in Y_1^{q+2}$ mit

$$\langle \operatorname{div} W, \operatorname{div} \Phi \rangle_{q+1,S} = \langle \operatorname{rot} \lambda, N\Phi \rangle_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} \quad \text{für alle } \Phi \in Y_1^{q+2} . \quad (111)$$

Nach Korollar 3.14 ist die stetige Bilinearform auf der linken Seite streng koerzitiv in Y_1^{q+2} . Die rechte Seite ist ein antilineares stetiges Funktional (Satz 4.1). Nach dem Satz von Lax–Milgram können wir (P1) lösen, und die Lösung W erfüllt

$$\|W\|_{D^{q+2}(S)} \leq c \|\operatorname{rot} \lambda\|_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} . \quad (112)$$

Ebenso lösen wir (P2): Gesucht $Q \in Y_1^{q+1}$ mit

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} Q, \operatorname{div} \Phi \rangle_{q,S} &= \langle \operatorname{div} W, \Phi \rangle_{q+1,S} + \langle \eta(\lambda), \Phi \rangle_{q+1,S} \\ &\quad - \langle \lambda, N\Phi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \quad \text{für alle } \Phi \in Y_1^{q+1} \end{aligned} \quad (113)$$

$$\|Q\|_{D^{q+1}(S)} \leq c(\|\operatorname{div} W\|_{q+1,S} + \|\lambda\|_{H_{-1/2}^q(\partial S)}) , \quad (114)$$

wobei

$$\eta(\lambda) := \eta^{q+1}(\lambda) := \sum_{j=1}^{J^{q+1}} y_j^{q+1} \langle \lambda, N y_j^{q+1} \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)}$$

für eine $L_2^{q+1}(S)$ -Orthonormalbasis $\{y_j^{q+1} \mid j = 1, \dots, J^{q+1}\}$ von Y_3^{q+1} . Testen der rechten Seite von (113) mit y_j^{q+1} liefert

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} W, y_j^{q+1} \rangle_{q+1, S} &+ \langle \eta(\lambda), y_j^{q+1} \rangle_{q+1, S} - \langle \lambda, N y_j^{q+1} \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= \langle \lambda, N y_j^{q+1} \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} - \langle \lambda, N y_j^{q+1} \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und damit (113) für alle $\Phi \in Y_1^{q+1} \oplus Y_3^{q+1}$. Um zu zeigen, daß die Formel für alle Formen $\Phi \in \check{N}H_{1/2}^q(\partial S) \subset Y^{q+1}$ (nach Lemma 5.3) richtig ist, verbleibt es diese mit

$$\Phi \in Y_2^{q+1}, \quad \Phi = \operatorname{div} \Psi \text{ mit o.B.d.A. } \Psi \in Y_1^{q+2}$$

zu testen. Aus $\operatorname{rot} \Psi = 0$, $\operatorname{div} \Psi = \Phi \in H_1^{q+1}(S)$ und der Randbedingung folgt $\Psi \in H_2^{q+2(S)}$, und die Formel (111) impliziert

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} W, \Phi \rangle_{q+1, S} &+ \langle \eta(\lambda), \Phi \rangle_{q+1, S} - \langle \lambda, N \Phi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= \langle \operatorname{div} W, \operatorname{div} \Psi \rangle_{q+1, S} - \langle \lambda, N \operatorname{div} \Psi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= \langle \operatorname{rot} \lambda, N \Psi \rangle_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} + \langle \lambda, \operatorname{div} N \Psi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{115}$$

also auch (113) für alle $\Phi \in \check{N}H_{1/2}^q(\partial S)$. Wir setzen $E := -\operatorname{div} Q$ und erhalten $\operatorname{rot} E = \operatorname{div} W + \eta(\lambda)$ und $\gamma_T E = \lambda$. Die Stetigkeit des Fortsetzungsoperators folgt aus (112) und (114).

ii) Mit

$$\begin{array}{ccc} \check{\gamma}_N & : & D_{-1/2}^{q-1}(\partial S) \longrightarrow D^q(S) \\ & & \lambda \longmapsto \kappa_q * \check{\gamma}_T * \lambda \end{array}$$

gilt

$$\gamma_N \check{\gamma}_N \lambda = \sigma_q * \gamma_T \check{\gamma}_T * \lambda = \lambda.$$

Die Stetigkeit folgt aus i).

q.e.d.

5.2 Wechselnde Randbedingungen

Sei in diesem Abschnitt $\mathcal{S} := (S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}_D(M)$ glatt. Wir wollen die Tangentialspur auf einem Randstück Γ_1 wie im homogenen Fall durch Volumenintegrale beschreiben. Dazu definieren wir

$$H_s^{q, \Gamma_2}(\partial S) = \{\varphi \in H_s^q(\partial S) \mid \varphi = 0 \text{ fast überall in } \Gamma_2\}, \quad s \in (0, \infty).$$

Vorsehen mit der Norm $\|\cdot\|_{H_s^q(\partial S)}$ ist dieser ein abgeschlossener Unterraum von $H_s^q(\partial S)$. Den Dualraum bezeichnen wir mit $H_{-s}^{q, \Gamma_2}(\partial S)$ und erklären die Rotation für $\lambda \in H_{-1/2}^{q, \Gamma_2}(\partial S)$ durch

$$\bigwedge_{\varphi \in H_{3/2}^{q+1, \Gamma_2}(\partial S)} \langle \operatorname{rot} \lambda, \varphi \rangle_{H_{-3/2}^{q+1, \Gamma_2}(\partial S)} := - \langle \lambda, \operatorname{div} \varphi \rangle_{H_{-1/2}^{q, \Gamma_2}(\partial S)}.$$

Ferner definieren wir

$$\begin{aligned} R_{-1/2}^{q, \Gamma_2}(\partial S) &:= \{\lambda \in H_{-1/2}^{q, \Gamma_2}(\partial S) \mid \operatorname{rot} \lambda \in H_{-1/2}^{q+1, \Gamma_2}(\partial S)\} \\ \|\lambda\|_{R_{-1/2}^{q, \Gamma_2}(\partial S)} &:= \|\operatorname{rot} \lambda\|_{H_{-1/2}^{q+1, \Gamma_2}(\partial S)} + \|\lambda\|_{H_{-1/2}^{q, \Gamma_2}(\partial S)} \end{aligned}$$

und zeigen zunächst:

Lemma 5.5

Für $\varphi \in H_{1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$ gelten $\check{N}\varphi \in D^{q+1,\Gamma_2}(S) \cap \overset{\circ}{R}^{q+1}(S)$ und $\check{T}\varphi \in R^{q,\Gamma_2}(S) \cap \overset{\circ}{D}^q(S)$.

Beweis: Sei $\varphi \in H_{1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$. Aus (106) folgt für $\Psi \in C_\infty^{q,\Gamma_1}(\overline{S})$

$$\begin{aligned} \langle \check{N}\varphi, \text{rot } \Psi \rangle_{q+1,S} + \langle \text{div } \check{N}\varphi, \Psi \rangle_{q,S} &= \langle N\check{N}\varphi, T\Psi \rangle_{q,\partial S} \\ &= \langle \varphi, T\Psi \rangle_{q,\partial S} = 0, \end{aligned}$$

also $\check{N}\varphi \in D^{q+1,\Gamma_2}(S)$. Lemma 5.3 und der Sternoperator liefern die übrigen Aussagen. **q.e.d.**

Für $E \in R^q(S)$ definieren wir die Tangentialspur $\gamma_T^{\Gamma_1} E$ in Γ_1 durch

$$\bigwedge_{\varphi \in H_{1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)} \langle \gamma_T^{\Gamma_1} E, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)} := \langle \gamma_T E, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)}.$$

Diese hat folgende Eigenschaften:

Satz 5.6

Für jedes $E \in R^q(S)$ liegt die Tangentialspur $\gamma_T^{\Gamma_1} E$ in $R_{-1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$ und es gelten:

- i) $\bigwedge_{E \in R^q(S)} \text{rot } \gamma_T^{\Gamma_1} E = \gamma_T^{\Gamma_1} \text{rot } E$
- ii) Die Abbildung $\gamma_T^{\Gamma_1} : R^q(S) \rightarrow R_{-1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$ ist stetig.
- iii) $E \in R^{q,\Gamma_1}(S) \Leftrightarrow \gamma_T^{\Gamma_1} E = 0$.

Beweis: Da $\gamma_T^{\Gamma_1}$ eine Einschränkung des Funktionals γ_T ist folgen i) und ii) aus Satz 5.1.

iii) Für $E \in C_\infty^{q,\Gamma_1}(\overline{S})$ und $\varphi \in H_{1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$ gilt nach Lemma 5.5

$$\langle \gamma_T^{\Gamma_1} E, \varphi \rangle_{H_{-1/2}^{q+1,\Gamma_2}(\partial S)} = \langle \text{rot } E, \check{N}\varphi \rangle_{q+1,S} + \langle E, \text{div } \check{N}\varphi \rangle_{q,S} = 0.$$

Andererseits impliziert $\gamma_T^{\Gamma_1} E = 0$ für $\Phi \in C_\infty^{q+1,\Gamma_2}(\overline{S})$ ($\Rightarrow N\Phi \in H_{1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$)

$$\begin{aligned} \langle \text{rot } E, \Phi \rangle_{q+1,S} + \langle E, \text{div } \Phi \rangle_{q,S} &= \langle \gamma_T E, N\Phi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= \langle \gamma_T^{\Gamma_1} E, N\Phi \rangle_{H_{-1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

q.e.d.

Entsprechende Aussagen erhalten wir für die Teilspur von Formen E aus $D^q(S)$. Erklären wir den Sternoperator analog zu (58) und

$$\begin{aligned} \gamma_N^{\Gamma_2} E &:= \sigma_q * \gamma_T^{\Gamma_2} * E \\ D_{-1/2}^{q,\Gamma_1}(\partial S) &:= *R_{-1/2}^{N-1-q,\Gamma_1}(\partial S) \end{aligned}$$

so folgen die dualen Resultate:

Satz 5.7

Für jedes $E \in D^q(S)$ liegt die Normalenspur $\gamma_N^{\Gamma_2} E$ in $D_{-1/2}^{q-1,\Gamma_1}(\partial S)$ und es gelten:

- i) $\bigwedge_{E \in D^q(S)} \text{div } \gamma_N^{\Gamma_2} E = -\gamma_N^{\Gamma_2} \text{div } E$
- ii) Die Abbildung $\gamma_N^{\Gamma_2} : D^q(S) \rightarrow D_{-1/2}^{q-1,\Gamma_1}(\partial S)$ ist stetig.
- iii) $E \in D^{q,\Gamma_2}(S) \Leftrightarrow \gamma_N^{\Gamma_2} E = 0$.

Bemerkung 5.8

Eine Konstruktion des Fortsetzungsoperators wie in Abschnitt 5.1 scheitert im Falle wechselnder Randbedingungen daran, daß Formen aus $R^q(\Gamma_1(S)) \cap D^q(\Gamma_2(S))$ im allgemeinen nicht in $H_1^q(S)$ liegen. Diese Eigenschaft kann man erwarten, wenn die Randstücke Γ_1 und Γ_2 senkrecht aufeinander treffen.

6 Lösungstheorie

Seien die Bezeichnungen wie in Abschnitt 5.1 und S glatt. Nach Satz 4.1 liegen Formen aus $R^q(S) \cap D^q(S)$, welche die elektrische oder magnetische homogene Randbedingung erfüllen, in $H_1^q(S)$. Wir betrachten folgendes Problem:

Gesucht ist eine Form $E \in R^q(S) \cap D^q(S)$ mit

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E &= F \\ \operatorname{div} E &= G \\ \gamma_T E &= \lambda \\ \langle E, y_j^q \rangle_{q,S} &= \alpha_j \text{ für } j = 1 \dots J^q \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Lemma 6.1

Seien $F \in R_0^{q+1}(S)$ und $\lambda \in R_{-1/2}^q(\partial S)$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \lambda &= \gamma_T F \\ \langle F, y \rangle_{q+1,S} &= \langle \lambda, Ny \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \text{ für alle } y \in Y_3^{q+1} . \end{aligned} \quad (117)$$

Dann existiert eine Lösung $E \in R^q(S) \cap D^q(S)$ von

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E &= F \\ \operatorname{div} E &= 0 \\ \gamma_T E &= \lambda \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Diese erfüllt

$$\|E\|_{R^q(S) \cap D^q(S)} \leq c(\|\lambda\|_{R_{-1/2}^q(\partial S)} + \|F\|_{q+1,S}) .$$

Beweis: Wir suchen zunächst eine Form $Q \in Y_1^{q+1}$ mit

$$\bigwedge_{\Phi \in Y_1^{q+1}} \langle \operatorname{div} Q, \operatorname{div} \Phi \rangle_{q,S} = \langle \lambda, N\Phi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} - \langle F, \Phi \rangle_{q+1,S} . \quad (119)$$

Nach Korollar 3.14 ist die linke Seite eine stetige streng koerzitive Bilinearform über Y_1^{q+1} . Die rechte Seite ist ein antilineares stetiges Funktional. Die nach dem Satz von Lax–Milgram existierende Lösung Q erfüllt

$$\|Q\|_{D^{q+1}(S)} \leq c(\|\lambda\|_{H_{-1/2}^q(\partial S)} + \|F\|_{q+1,S}) ,$$

und nach Voraussetzung gilt (119) sogar für alle $\Phi \in Y_1^{q+1} \oplus Y_3^{q+1}$. Für $\Phi \in Y_2^{q+1}$ mit $\Phi = \operatorname{div} \Psi$ und $\Psi \in Y_1^{q+2} \cap H_2^{q+2}(S)$ (vgl. Abschnitt 5.1) folgt aus Satz 5.1 und (117)

$$\begin{aligned} \langle F, \operatorname{div} \Psi \rangle_{q+1,S} &= \langle \gamma_T F, N\Psi \rangle_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} \\ &= \langle \operatorname{rot} \lambda, N\Psi \rangle_{H_{-1/2}^{q+1}(\partial S)} \\ &= \langle \lambda, N\operatorname{div} \Psi \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} , \end{aligned}$$

also auch (119) für alle $\Phi \in Y^{q+1} \supset \tilde{N}H_{1/2}^q(\partial S)$. Somit ist $E = \operatorname{div} Q$ Lösung zu (118). **q.e.d.**

Lemma 6.2

Sei $G \in \operatorname{div} D^q(S)$. Dann existiert eine Lösung $E \in R^q(S) \cap D^q(S)$ von

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E &= 0 \\ \operatorname{div} E &= G \\ \gamma_T E &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Diese erfüllt

$$\|E\|_{D^q(S)} \leq c \|G\|_{q-1,S} .$$

Beweis: Nach Korollar 3.14 können wir ein $Z \in Y_2^{q-1}$ finden mit

$$\bigwedge_{\Phi \in Y_2^{q-1}} \langle \operatorname{rot} Z, \operatorname{rot} \Phi \rangle_{q,S} = - \langle G, \Phi \rangle_{q-1,S} \quad (121)$$

$$\|Z\|_{R^{q-1}(S)} \leq c \|G\|_{q-1,S} . \quad (122)$$

Wegen $G \in (Y_3^{q-1})^\perp$ ist (121) auch für alle $\Phi \in Y_3^{q-1}$ erfüllt. Für $\Phi \in Y_1^{q-1}$ gilt die Gleichung (121) wegen der Voraussetzung an G . Wir folgern

$$\bigwedge_{\Phi \in Y^{q-1}} \langle \operatorname{rot} Z, \operatorname{rot} \Phi \rangle_{q,S} = - \langle G, \Phi \rangle_{q-1,S} .$$

Setzen wir

$$E := \operatorname{rot} Z \in \operatorname{rot} \overset{\circ}{R}^{q-1}(S) \subset \overset{\circ}{R}_0^q(S) , \quad (123)$$

so folgt aus $\overset{\circ}{C}_\infty^q(S) \subset Y^{q-1}$, (122) und (110) die Behauptung.

q.e.d.

Satz 6.3

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit von (116) sind

$$F \in \operatorname{rot} R^q(S) , \quad G \in \operatorname{div} D^q(S) , \quad \lambda \in R_{-1/2}^q(\partial S)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \lambda &= \gamma_T F \\ \bigwedge_{y \in Y_3^{q+1}} \langle F, y \rangle_{q+1,S} &= \langle \lambda, Ny \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} . \end{aligned}$$

Das Problem ist dann eindeutig lösbar, und die Lösung erfüllt

$$\|E\|_{R^q(S) \cap D^q(S)} \leq c (\|F\|_{q+1,S} + \|G\|_{q-1,S} + \|\lambda\|_{R_{-1/2}^q(\partial S)} + \sum_{j=1}^{J^q} |\alpha_j|) .$$

Beweis: Nach (110) liegt die Lösung des homogenen Problems in $\overset{\circ}{R}_0^q(S) \cap D_0^q(S)$. Aus $\langle E, y_j^q \rangle_{q,S} = 0$, $j = 1, \dots, J^q$ folgt $E = 0$ und damit die Eindeutigkeit.

Seien E_1 und E_2 Lösungen der Probleme (118) und (120). Setzen wir

$$E := E_1 + E_2 + \sum_{k=1}^{J^q} (\alpha_k - \langle E_1, y_k^q \rangle_{q,S}) y_j^q ,$$

so gelten $\operatorname{rot} E = F$, $\operatorname{div} E = G$, und wegen (123) und (110) ist die Randbedingung erfüllt. Aus

$$\langle E, y_j^q \rangle_{q,S} = \langle E_1, y_j^q \rangle_{q,S} + (\alpha_j - \langle E_1, y_j^q \rangle_{q,S}) = \alpha_j$$

folgt, daß E das Problem löst (hier haben wir $E_2 \in \operatorname{rot} \overset{\circ}{R}^{q-1}(S)$ nach (123) benutzt).

Es verbleibt, die Notwendigkeit der Voraussetzungen zu zeigen. Daß im Falle der Lösbarkeit $F \in \operatorname{rot} R^q(S)$ und $G \in \operatorname{div} D^q(S)$ gelten müssen, ist klar. Aus Satz 5.1 folgt $\lambda \in R_{-1/2}^q(\partial S)$.

Nach Satz 5.1 ii) gilt

$$\operatorname{rot} \lambda = \operatorname{rot} \gamma_T E = \gamma_T \operatorname{rot} E = \gamma_T F$$

und für $y \in \overset{\circ}{R}_0^{q+1}(S) \cap D_0^{q+1}(S)$

$$\begin{aligned} \langle F, y \rangle_{q+1,S} &= \langle \operatorname{rot} E, y \rangle_{q+1,S} + \langle E, \operatorname{div} y \rangle_{q,S} \\ &= \langle \gamma_T E, Ny \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} \\ &= \langle \lambda, Ny \rangle_{H_{-1/2}^q(\partial S)} . \end{aligned}$$

q.e.d.

Wir formulieren noch das duale Problem: Gesucht $E \in R^q(S) \cap D^q(S)$ mit

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E &= F \\ \operatorname{div} E &= G \\ \gamma_N E &= \lambda \\ \langle E, *y_j^{N-q} \rangle_{q,S} &= \alpha_j \text{ für } j = 1 \dots J^{N-q} \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Das duale Resultat lautet dann:

Satz 6.4

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit von (124) sind

$$F \in \operatorname{rot} R^q(S), \quad G \in \operatorname{div} D^q(S), \quad \lambda \in D_{-1/2}^{q-1}(\partial S)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \lambda &= -\gamma_N G \\ \bigwedge_{y \in *Y_3^{N-(q-1)}} \langle G, y \rangle_{q-1,S} &= \langle \lambda, Ty \rangle_{H_{-1/2}^{q-1}(\partial S)} \end{aligned}$$

Das Problem ist dann eindeutig lösbar, und die Lösung erfüllt

$$\|E\|_{R^q(S) \cap D^q(S)} \leq c(\|F\|_{q+1,S} + \|G\|_{q-1,S} + \|\lambda\|_{D_{-1/2}^{q-1}(\partial S)} + \sum_{j=1}^{J^{N-q}} |\alpha_j|).$$

7 Die Dirichlet–Neumann Felder

Satz 7.1 Sei (S, Γ_1, Γ_2) glatt und $\Gamma_1 = \bigcup_{k=1}^K \Gamma_{1,k}$, mit $\operatorname{dist}(\Gamma_{1,k}, \Gamma_{1,l}) > 0$ für $l \neq k$ und $\Gamma_{1,k}$ offen, nicht leer und zusammenhängend. Ferner möge die erste Betti-Zahl von S verschwinden. Dann gilt

$$\dim(R_0^{1,\Gamma_1}(S) \cap D_0^{1,\Gamma_2}(S)) = K - 1.$$

Um den Satz zu beweisen, benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen:

Lemma 7.2

Aus den Voraussetzungen von Satz 7.1 folgt die Existenz offener Mengen $S_k \subset M \setminus \overline{S}$ mit $\overline{S_k} \cap \overline{S} = \overline{\Gamma_{1,k}}$, $k = 1, \dots, K$ und $\operatorname{dist}(S_k, S_l) > 0$, $k \neq l$. Wir können die Mengen S_k so wählen, daß die Glattheitseigenschaft für

$$\hat{S} := S \cup \Gamma_1 \cup \bigcup_{k=1}^K S_k$$

erhalten bleibt und die erste Betti-Zahl von \hat{S} verschwindet.

Beweis: Nach [25, Theorem 1.1.7] oder auch [9] existiert ein Homöomorphismus n von $\partial S \times (-1, 1)$ auf eine in M offene Umgebung von ∂S mit

$$\bigwedge_{x \in \partial S} n(x, 0) = x$$

und der Eigenschaft, daß $n|_{\partial S \times (-1, 0]}$ bzw. $n|_{\partial S \times [0, 1)}$ Diffeomorphismen auf in \overline{S} bzw. $M \setminus S$ offene Umgebungen von ∂S sind. Für eine Funktion $h \in C_\infty(\partial S)$ mit Werten in $[0, 1/2]$ und $h|_{\Gamma_1} > 0$, $h|_{\Gamma_2} = 0$ setzen wir

$$S_k := \{n(x, th(x)) \mid 0 < t < 1, x \in \Gamma_{1,k}\}$$

$$\tilde{S} := \bigcup_{k=1}^K S_k$$

$$\hat{S} := S \cup \Gamma_1 \cup \tilde{S}.$$

Gilt $\text{dist}(S_k, S_l) = 0$, so existieren Folgen $(t_n), (s_n) \subset [0, 1]$, $(x_n) \subset \Gamma_{1,k}$ und $(y_n) \subset \Gamma_{1,l}$ mit

$$d_M(n(x_n, t_n h(x_n)), n(y_n, s_n h(y_n))) \rightarrow 0 .$$

Dies impliziert $d_M(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Wegen $\text{dist}(\Gamma_{1,k}, \Gamma_{1,l}) > 0$ für $k \neq l$ müssen k und l übereinstimmen. Ähnlich zeigt man $\overline{S_k} \cap \overline{S} = \overline{\Gamma_{1,k}}$. Da alle Punkte aus Γ_1 innere Punkte der Menge \hat{S} sind, ist \hat{S} offen, und es gilt wegen $S \cap \overline{S} = \overline{S} \cap \hat{S} = \emptyset$

$$\begin{aligned} \partial \hat{S} &= \overline{S} \setminus \hat{S} \\ &= (\overline{S} \cup \overline{\tilde{S}}) \setminus (S \cup \Gamma_1 \cup \tilde{S}) \\ &= (\partial S \setminus \Gamma_1) \cup (\partial \tilde{S} \setminus \Gamma_1) . \end{aligned}$$

Da \tilde{S} das Bild der Menge

$$W := \{(x, t) \in \Gamma_1 \times \mathbb{R} \mid 0 < t < h(x)\}$$

unter dem Diffeomorphismus n ist, erhalten wir mit $\gamma := \partial \Gamma_1 = \partial \Gamma_2$

$$\begin{aligned} \partial \tilde{S} &= n(\partial W) \\ &= n(\Gamma_1 \times \{0\}) \cup \{n(x, h(x)) \mid x \in \Gamma_1\} \cup n(\gamma \times \{0\}) \\ &= \Gamma_1 \cup \{n(x, h(x)) \mid x \in \Gamma_1\} \cup \gamma . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \partial \hat{S} &= \Gamma_2 \cup \gamma \cup \{n(x, h(x)) \mid x \in \Gamma_1\} \\ &= \{n(x, h(x)) \mid x \in \partial S\} \end{aligned}$$

und damit die Glattheit des Randes $\partial \hat{S}$. Setzen wir

$$S_k^- := \{n(x, th(x)) \mid -1 < t < 0, x \in \Gamma_{1,k}\} ,$$

so stellt die Abbildung

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \notin \bigcup_{k=1}^K S_k^- \\ n(y, (1+2t)h(y)) & \text{für } x = n(y, th(y)), t \in (-1, 0) \end{cases}$$

einen Homöomorphismus zwischen den Mengen S und \hat{S} dar. Somit verschwindet auch die erste Betti-Zahl von \hat{S} ([4, Seite 160] oder auch [10, Seite 18] in Verbindung mit [23, Seite 42]). **q.e.d.**

Lemma 7.3

Die Nullfortsetzung \hat{E} einer Form E aus $R^{q, \Gamma_1}(S)$ liegt in $R^q(\hat{S})$.

Beweis: Wegen $\Gamma_2 \subset M \setminus \hat{S}$ liegen Elemente aus $\mathring{C}^{q+1}(\hat{S})$ auch in $C_\infty^{q+1, \Gamma_2}(S)$. Somit gilt für $E \in R^{q, \Gamma_1}(S)$, $\Phi \in \mathring{C}_\infty^{q+1}(\hat{S})$ und die Nullfortsetzung F von $\text{rot } E$

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}, \text{div } \Phi \rangle_{q, \hat{S}} &= \langle E, \text{div } \Phi \rangle_{q, S} \\ &= - \langle \text{rot } E, \Phi \rangle_{q+1, S} \\ &= - \langle F, \Phi \rangle_{q+1, \hat{S}} , \end{aligned}$$

also auch $\hat{E} \in R^q(\hat{S})$. **q.e.d.**

Lemma 7.4

Verschwindet $\hat{E} \in R^q(\hat{S})$ in $\hat{S} \setminus S$, so liegt $E := \hat{E}|_S$ in $R^{q, \Gamma_1}(S)$.

Beweis: Wegen $\partial S = \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_2}$ und $S_k \subset M \setminus \overline{S}$ gilt

$$\begin{aligned} \overline{S} \cap (M \setminus \hat{S}) &= \overline{S} \setminus (S \cup \Gamma_1 \cup \bigcup_{k=1}^K S_k) \\ &= \partial S \cap \overline{\Gamma_2} \cap \overline{S} = \overline{\Gamma_2} . \end{aligned}$$

Für eine Form $\Psi \in C_{\infty}^{q+1, \Gamma_2}(\overline{S})$ folgen

$$\begin{aligned} \text{supp } \Psi \cap \overline{S} \cap (M \setminus \hat{S}) &= \emptyset \\ \text{dist } (\text{supp } \Psi \cap \overline{S}, M \setminus \hat{S}) &> 0 \end{aligned}$$

($\text{supp } \Psi \cap \overline{S}$ ist kompakt, $M \setminus \hat{S}$ abgeschlossen). Mit einer Funktion $\chi \in \mathring{C}_{\infty}(\hat{S})$, $\chi = 1$ in $\text{supp } \Psi \cap \overline{S}$ gelten $\chi\Psi \in \mathring{C}_{\infty}^{q+1}(\hat{S})$ (nach Definition ist Ψ auf ganz M erklärt) und

$$\begin{aligned} \langle E, \text{div } \Psi \rangle_{q, S} &= \langle \hat{E}, \text{div } \chi\Psi \rangle_{q, \hat{S}} \\ &= - \langle \text{rot } \hat{E}, \chi\Psi \rangle_{q+1, \hat{S}} \\ &= - \langle \text{rot } E, \Psi \rangle_{q+1, S} . \end{aligned}$$

Wir erhalten $E \in R^{q, \Gamma_1}(S)$.

q.e.d.

Beweis von Satz 7.1:

Wir verwenden die Bezeichnungen aus Lemma 7.2. Für Funktionen $\Psi_k \in \mathring{C}_{\infty}^0(M)$ mit $\Psi_k = \delta_{k, l}$ in S_l und

$$\text{dist } (\text{supp } \text{rot } \Psi_k, S_l) > 0 \quad (125)$$

für alle $k, l = 1, \dots, K$ existieren nach Korollar 3.14 und dem Satz von Lax–Milgram Funktionen η_k mit $\eta_k - \Psi_k \in R^{0, \Gamma_1}(S)$ und

$$\bigwedge_{\Phi \in R^{0, \Gamma_1}(S)} \langle \text{rot } (\eta_k - \Psi_k), \text{rot } \Phi \rangle_{1, S} = - \langle \text{rot } \Psi_k, \text{rot } \Phi \rangle_{1, S} \quad (126)$$

(Beachte $R^{0, \Gamma_1}(S) = R^{0, \Gamma_1}(S) \cap D_0^{0, \Gamma_2}(S)$). Wir behaupten

$$\{\text{rot } \eta_k \mid k = 1, \dots, K-1\} \quad (127)$$

ist eine Basis von $R_0^{1, \Gamma_1}(S) \cap D_0^{1, \Gamma_2}(S)$. Aus (126) folgt sofort $\text{rot } \eta_k \in D_0^{1, \Gamma_2}(S)$. Wegen

$$\text{rot } \eta_k = \text{rot } (\eta_k - \Psi_k) + \text{rot } \Psi_k$$

und (125) gilt $\text{rot } \eta_k \in R_0^{1, \Gamma_1}(S)$ (wie in Lemma 2.11 zeigt man $E \in R^q(S)$ für Formen $E \in R^q(S)$ mit $\text{dist } (\text{supp } E, \Gamma_1) > 0$). Um zu zeigen, daß (127) ein Erzeugendensystem ist, wählen wir $F \in R_0^{1, \Gamma_1}(S) \cap D_0^{1, \Gamma_2}(S)$. Die Nullfortsetzung \hat{F} liegt nach Lemma 7.3 in $R_0^1(\hat{S})$. Da die erste Betti-Zahl von \hat{S} verschwindet, existiert nach [17, Satz 1, Satz 2] und Korollar 3.14 eine Form $G \in R^0(\hat{S})$ mit $\text{rot } G = \hat{F}$. Aus $\text{rot } G = 0$ in S_k und (56) folgt

$$G(x) = c_k \text{ für } x \in S_k . \quad (128)$$

Sei o.B.d.A. $c_K = 0$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu &:= F - \sum_{k=1}^{K-1} c_k \text{rot } \eta_k \in R_0^{1, \Gamma_1}(S) \cap D_0^{1, \Gamma_2}(S) \\ H &:= G - \sum_{k=1}^{K-1} c_k \Psi_k . \end{aligned} \quad (129)$$

Wegen (128) verschwindet H in $\hat{S} \setminus S$, und wir erhalten nach Lemma 7.4

$$H \in R^{0, \Gamma_1}(S) .$$

In S gilt

$$\text{rot } H = F - \sum_{k=1}^{K-1} c_k \text{rot } \Psi_k = \mu - \sum_{k=1}^{K-1} c_k \text{rot } (\Psi_k - \eta_k) ,$$

und es folgt

$$\mu = \text{rot } H + \sum_{k=1}^{K-1} c_k \text{rot } (\Psi_k - \eta_k) \in \text{rot } R^{0, \Gamma_1}(S) ,$$

also $\mu = 0$ (Lemma 3.6 und (129)). Es verbleibt, die lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Gelte daher

$$\sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k \operatorname{rot} \eta_k = 0 .$$

Wir setzen

$$\hat{\eta}_k := \begin{cases} \delta_{k,l} & \text{in } S_l \cup \Gamma_{1,l} \text{ für } l = 1, \dots, K \\ \eta_k & \text{in } S \end{cases}$$

für $k = 1, \dots, K-1$. In $S_l \cup \Gamma_{1,l}$ gilt $0 = \Psi_k - \hat{\eta}_k$, und aus $\Psi_k - \eta_k \in R^{0,\Gamma_1}(S)$ folgt $\Psi_k - \hat{\eta}_k \in R^0(\hat{S})$, also auch $\hat{\eta}_k \in R^0(\hat{S})$ und

$$\sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k \operatorname{rot} \hat{\eta}_k = 0 .$$

Dies impliziert

$$\sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k \hat{\eta}_k = c$$

in \hat{S} . Wegen $\hat{\eta}_k = 0$ in S_K muß die Konstante c verschwinden, und wir erhalten für $l = 1, \dots, K-1$

$$0 = \sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k \hat{\eta}_k = \alpha_l \text{ in } S_l .$$

q.e.d.

8 Eigenformen

Um Aussagen über die Güte von Lösungen der Maxwellgleichung machen zu können, kann man sich der Methode von Saranen [24] bedienen (in Kegelgebieten im \mathbb{R}^3). Hierzu ist es notwendig, Eigenformen niedriger Dimensionen zu kennen. Wir wollen für spezielle Kegelgebiete $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}(M)$ die Orthonormalsysteme aus Lemma 3.9, die wir hier unter Berücksichtigung der Raumdimension mit $\{E_n^{N,q}\}$ bzw. $\{H_n^{N,q}\}$ bezeichnen, und die Eigenwerte – hier $\omega_n^{N,q}$ – für $\epsilon = \operatorname{id}$ und $\mu = \operatorname{id}$ berechnen. Darüber hinaus untersuchen wir deren Regularität. Daß wir nach den Eigenformen entwickeln können, folgt aus Lemma 3.9, wenn wir die kompakte Einbettung

$$R^{q,\Gamma_1}(S) \cap D^{q,\Gamma_2}(S) \hookrightarrow L_2^q(S) \quad (130)$$

und die Approximationseigenschaft $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}_D(M)$ zeigen können.

8.1 Die halbe Kreislinie

Wir beginnen mit dem halben Kreisrand

$$\begin{aligned} K &:= \{ \tau(\varphi) \mid \varphi \in (0, \pi) \} , \quad \gamma_1 := \tau(\pi) , \quad \gamma_2 := \tau(0) \\ \text{mit } \tau(\varphi) &:= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.13 folgen $(K, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}_D(S_2)$ und die Kompaktheit der Einbettung in (130). Sei zunächst $q = 0$. Aus (56) folgt, daß die Dirichlet–Neumann–Felder verschwinden, d.h. $N^0 = 0$ in der Terminologie von Lemma 3.9. Die Eigenformen (E, H) erfüllen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + i\omega H &= 0 \\ \operatorname{div} H + i\omega E &= 0 . \end{aligned}$$

Mit der Koordinate $\varphi := \varphi(x) := \arccos(x/|x|)$, $E = e(\varphi)$ folgt für $\Psi \in C_\infty^{0,\gamma_1}(\overline{K})$, $\Psi = \psi(\varphi)$ mit (16) und (14)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \operatorname{rot} E, \operatorname{rot} \Psi \rangle_{1,K} + i\omega \langle H, \operatorname{rot} \Psi \rangle_{1,K} \\ &= \langle \operatorname{rot} E, \operatorname{rot} \Psi \rangle_{1,K} - i\omega \langle \operatorname{div} H, \Psi \rangle_{0,K} \\ &= \langle \operatorname{rot} E, \operatorname{rot} \Psi \rangle_{1,K} - \omega^2 \langle E, \Psi \rangle_{0,K} \\ &= \int_0^\pi e'(\varphi) \psi'(\varphi) d\varphi - \omega^2 \int_0^\pi e(\varphi) \psi(\varphi) d\varphi . \end{aligned}$$

Die Regularitätstheorie z.B. [1, Theorem 6.2] liefert

$$e \in C_\infty(0, \pi) , \quad e''(\varphi) + \omega^2 e(\varphi) = 0 .$$

Alle Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$e(\varphi) = a \cos(\omega\varphi) + b \sin(\omega\varphi) . \quad (131)$$

Testen wir mit $\Psi = \psi(\varphi)d\varphi \in C_\infty^{1,\gamma_2}(\overline{K})$, $\psi(\pi) = 1$, so impliziert $E \in R^{0,\gamma_1}(K)$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle E, \operatorname{div} \Psi \rangle_{0,K} + \langle \operatorname{rot} E, \Psi \rangle_{1,K} \\ &= \int_0^\pi e(\varphi)\psi'(\varphi)d\varphi + \int_0^\pi e'(\varphi)\psi(\varphi)d\varphi = e(\pi) . \end{aligned} \quad (132)$$

Wegen $\operatorname{rot} E = -i\omega H \in D^{1,\gamma_2}(K)$ gilt für $\Psi = \psi(\varphi) \in C_\infty^{0,\gamma_1}(\overline{K})$, $\psi(0) = 1$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \operatorname{rot} E, \operatorname{rot} \Phi \rangle_{1,K} + \langle \operatorname{div} \operatorname{rot} E, \Phi \rangle_{0,K} \\ &= \int_0^\pi e'(\varphi)\psi'(\varphi)d\varphi + \int_0^\pi e''(\varphi)\psi(\varphi)d\varphi = -e'(0) . \end{aligned} \quad (133)$$

Mit (131), (132), (133) und der Maxwellgleichung erhalten wir Teil i) des folgenden Satzes

Satz 8.1

i) Bis auf normierende Konstanten gelten

$$\begin{aligned} E_n^{1,0} &= \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi\right) \\ H_n^{1,0} &= -i \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\varphi\right)d\varphi \\ \omega_n^{1,0} &= n - \frac{1}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

ii) Für $q = 1$ sind die Orthonormalsysteme leer.

Beweis: ii) Aus (56) folgt, daß der Raum $D_0^{1,\gamma_2}(K)$ nur aus der Nullabbildung besteht.

q.e.d.

8.2 Der Halbkreis

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 8.1 sei

$$(S, \Gamma_1, \Gamma_2) = (C(K), C(\gamma_1) \cup K \cup \{(-1, 0)\}, C(\gamma_2)) ,$$

der obere Halbkreis mit Radius 1 um den Ursprung. Wir zeigen zunächst

Lemma 8.2

i) Es gilt die Approximationsaussage $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}_D$.

ii) Die Einbettung $R^{q,\Gamma_1}(S) \cap D^{q,\Gamma_2}(S) \hookrightarrow L_2^q(S)$ ist kompakt.

Beweis: i) Für eine Karte (V, h) um $x \in \overline{S}$ seien

$$\left. \begin{aligned} G &:= h(S \cap V) \\ \hat{\Gamma}_i &:= h(\Gamma_i \cap V) \\ W &:= U_2(1/3) \cap \overline{G} . \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Es genügt wieder, eine Form $E \in R^{q,\hat{\Gamma}_1}(G)$ mit kompaktem Träger in W durch Formen aus $C_\infty^{q,\hat{\Gamma}_1}(\overline{G})$ mit kompaktem Träger in W zu approximieren. Für alle $x \neq \gamma_2$ folgt dies aus (62) und Satz 2.20. Zu γ_2 können wir eine Karte (V, h) finden mit

$$\left. \begin{aligned} G &= \{x \in U_2 \mid x_1 < 0, x_2 < 0\} \\ \hat{\Gamma}_1 &= \{x \in U_2 \mid x_1 = 0, x_2 < 0\} \\ \hat{\Gamma}_2 &= \{x \in U_2 \mid x_1 < 0, x_2 = 0\} . \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

In $\{x \in U_2 \mid x_1 > 0, x_2 < 0\}$ setzen wir wie in Lemma 7.3 E zu Null fort, verschieben den Träger in Richtung $(-1, 0)$ und approximieren dort nach Lemma 2.15 durch Formen aus $C_\infty^{q, \hat{\Gamma}_1}(\overline{G})$. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Abschnidefunktion erhalten wir $(S, \Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathcal{M}_D(S)$.

ii) Mit den Bezeichnungen aus (134) zeigen wir für eine Karte (V, h) um x und eine in $R^{q, \hat{\Gamma}_1}(G) \cap D^{q, \hat{\Gamma}_2}(G)$ beschränkte Folge (E^n) mit $\text{supp } E^n \subset\subset W$, daß diese eine in $L_2^q(G)$ konvergente Teilfolge besitzt. Für alle $x \neq \gamma_2$ folgt dies aus [32] bzw. Satz 3.2. Im Falle $x = \gamma_2$ wählen wir die Umgebung V mit (135). Mit der Abbildung τ aus Lemma 4.2 gilt $\mu_\tau = \epsilon_\tau = \text{id}$ (siehe (20), (24)). Wir setzen

$$\hat{G} := G \cup \{x \in U_2 \mid x_1 < 0, x_2 \geq 0\}$$

und zeigen für den (eingeschränkten) Spiegelungsoperator S_{rot} aus Lemma 4.2

$$\begin{aligned} S_{\text{rot}} E^n &\in \overset{\circ}{R}^q(\hat{G}) \cap D^q(\hat{G}) \\ \|S_{\text{rot}} E^n\|_{R^q(\hat{G}) \cap D^q(\hat{G})} &\leq c. \end{aligned}$$

Die Beschränktheit folgt aus Lemma 2.13, die Aussage $S_{\text{rot}} E^n \in D^q(\hat{G})$ durch Approximation in $D^q(G)$ mit Formen aus $C_\infty^{q, \hat{\Gamma}_2}(\overline{G})$ (beachte $\epsilon = \text{id}$). Ebenfalls durch Approximation erhalten wir $S_{\text{rot}} E^n \in R^{q, \hat{\Gamma}}(\hat{G})$ mit

$$\hat{\Gamma} := \hat{\Gamma}_1 \cup \{x \in U_2 \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\}.$$

Die Lemmata 2.13 und 2.11 liefern $S_{\text{rot}} E^n \in \overset{\circ}{R}^q(\hat{G})$. Nach [32] besitzt E^n eine in $L_2^q(\hat{G})$, damit auch in $L_2^q(G)$ konvergente Teilfolge. **q.e.d.**

Wir definieren für $I := (0, 1)$

$$\begin{aligned} C_{1,q} &:= \{\varphi \in C_\infty((0, 1]) \mid \varphi(1) = 0, \hat{M}^{-1}\varphi, \hat{M}^{-(q-1)}D\hat{M}^{q-1}\varphi \in L_{2,2}(I)\} \\ C_{2,q} &:= \{\varphi \in C_\infty((0, 1)) \mid \hat{M}^{-(1-q)}D\hat{M}^{1-q}\varphi, \hat{M}^{-1}\varphi \in L_{2,2}(I)\} \end{aligned}$$

Diese erfüllen

Lemma 8.3

Für die Koeffizienten aus (84), (85) zu einer Form $F \in R^{q, \Gamma_1}(S) \cap D^{q, \Gamma_2}(S)$ gelten

i) für alle $\varphi \in C_{1,q}$

$$\begin{aligned} &\int_0^R r^{N-1} a_m(r) r^{-(q-1)} (r^{q-1} \varphi(r))' dr \\ &= -i \omega_m^{q-1} \int_0^R r^{N-1} r^{-1} d_m(r) \varphi(r) dr \\ &\quad - \int_0^R r^{N-1} c_m^D(r) \varphi(r) dr \text{ für } m > N^{q-1} \end{aligned}$$

ii) für alle $\varphi \in C_{2,q}$

$$\begin{aligned} &\int_0^R r^{N-1} d_m(r) r^{-(N-q-1)} (r^{N-q-1} \varphi(r))' dr \\ &= i \omega_m^{q-1} \int_0^R r^{N-1} r^{-1} a_m(r) \varphi(r) dr \\ &\quad - \int_0^R r^{N-1} b_m^R(r) \varphi(r) dr \text{ für } m > N^{q-1}. \end{aligned}$$

Beweis: Die beiden Aussagen können wir ganz analog zu Lemma 3.10 beweisen, wenn wir zeigen, daß die Formeln (70) (für i)) und (73) (für ii)) auch hier Gültigkeit haben. Dazu vergleichen wir die Randbedingungen an φ . Beim Beweis von Lemma 2.22 ist nicht benutzt worden, daß φ einen positiven Abstand zur Null besitzt. Wir müssen lediglich garantieren, daß die von r abhängigen Ausdrücke auf den rechten Seiten der Skalarprodukte so beschaffen sind, daß wir Lemma 2.21 anwenden können. Dies folgt aber aus den Voraussetzungen an φ . Ebenfalls entnehmen wir dem Beweis, daß die Randbedingung $\varphi(1) = 0$ ausreichend ist. Dies liefert i). Im Fall

ii) übernimmt $F \in R^{q, \Gamma_1}(S)$ die fehlende Randbedingung; der Deckel der Kegelspitze ist hier in Γ_1 enthalten.
q.e.d.

Wir untersuchen zunächst den Fall $q = 0$. Wie im Abschnitt 8.1 liefert (56), daß die Dirichlet–Neumann–Felder verschwinden. Seien (E, H) Lösungen von (82). Mit den Resultaten aus Abschnitt 8.1 zerlegen wir gemäß (83)

$$E = \tilde{\tau} \sum_{n \geq 1} c_n E_n^{1,0} \quad (136)$$

$$H = \tilde{\rho} \sum_{n \geq 1} \tilde{a}_n E_n^{1,0} + \tilde{\tau} \sum_{n \geq 1} \tilde{d}_n H_n^{1,0}, \quad (137)$$

wobei nach den Maxwellgleichungen die Beziehungen

$$a_n^R = -i\omega \tilde{a}_n, \quad d_n^R = -i\omega \tilde{d}_n, \quad \tilde{c}_n^D = -i\omega c_n \quad (138)$$

gelten. Wir werden zeigen, daß die Koeffizienten $c_n \in L_{2,2}(0,1)$ im Definitionsbereich des Abschlusses des Besseloperators

$$\begin{aligned} D(B^\nu) &:= \{v \in L_{2,2}(0,1) \mid v(r) = r^\nu u(r), \quad u \in C_\infty([0,1]), \quad u'(0) = u(1) = 0\} \\ (B^\nu v)(r) &:= -v''(r) - \frac{v'(r)}{r} + \frac{\nu^2}{r^2} v(r) \quad \text{mit } \nu = \omega_n^{1,0} = n - \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

liegen. Dieser ist nach [27, Satz 27.2] im Raum $L_{2,2}(0,1)$ wesentlich selbstadjungiert. Funktionen $v \in D(B^\nu)$ erfüllen $rv' \in C_{2,1}$ und $v \in C_{1,1}$. Wir erhalten mit den Lemmata 3.10 und 8.3, (138) und $\tilde{b}_n^R = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 r(B^\nu v)(r) c_n(r) dr &= i\nu^{-1} \int_0^1 r(B^\nu v)(r) r d_n^R(r) dr \\ &= -i\nu^{-1} \int_0^1 r(rv'(r))' d_n^R(r) dr + i\nu^{-1} \int_0^1 \frac{\nu^2}{r} v(r) r d_n^R(r) dr \\ &= -\omega\nu^{-1} \int_0^1 r(rv'(r))' \tilde{d}_n(r) dr + i\nu \int_0^1 v(r) d_n^R(r) dr \\ &=: I_1 + I_2 \\ I_1 &= -i\omega \int_0^1 \tilde{a}_n(r) rv'(r) dr \\ &= -\nu\omega \int_0^1 \tilde{d}_n(r) v(r) dr + i\omega \int_0^1 r \tilde{c}_n^D(r) v(r) dr \\ &= -I_2 + \omega^2 \int_0^1 rv(r) c_n(r) dr. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit J_ν die Besselfunktion der Ordnung ν und mit $\omega_{n,m}^{2,0}$ die positiven Nullstellen der Besselfunktion $J_{n-1/2}$, so folgt aus [27, Satz 27.3] bis auf normierende Konstanten für ein $m \in \mathbb{N}$ entweder

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (\omega_{n,m}^{2,0})^2 \\ c_n(r) &= c_{n,m}(r) = J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,0} r) \\ \tilde{d}_n(r) &= \tilde{d}_{n,m}(r) = i(\omega_{n,m}^{2,0})^{-1} d_{n,m}^R(r) \\ &= \omega_n^{1,0} (\omega_{n,m}^{2,0})^{-1} r^{-1} c_{n,m}(r) \\ \tilde{a}_n(r) &= \tilde{a}_{n,m}(r) = i(\omega_{n,m}^{2,0})^{-1} a_{n,m}^R(r) \\ &= i(\omega_{n,m}^{2,0})^{-1} c'_{n,m}(r), \end{aligned}$$

wobei die letzten Identitäten aus (138) und Lemma 3.10 folgen, oder $\omega > 0$ beliebig und

$$c_n = \tilde{a}_n = \tilde{d}_n = 0.$$

Da nach [22, Seite 203] oder [28, Seite 485] die Besselfunktionen $J_{n-1/2}$ für natürliche Zahlen n keine gemeinsamen positiven Nullstellen haben, zerfallen die Reihen in (136) und (137) in eine Komponente.

Im Falle $q = 1$ können wegen der unsymmetrischen Randbedingungen nicht die dualen Resultate benutzt werden. Daß die Dirichlet–Neumann–Felder verschwinden, zeigt man analog zu Satz 7.1. Wie oben zerlegen wir

$$E = \check{\rho} \sum_{n \geq 1} \tilde{a}_n E_n^{1,0} + \check{\tau} \sum_{n \geq 1} \tilde{d}_n H_n^{1,0} \quad (139)$$

$$H = \check{\rho} \sum_{n \geq 1} b_n H_n^{1,0}, \quad (140)$$

erhalten die Gleichungen

$$a_n^D = -i\omega \tilde{a}_n, \quad d_n^D = -i\omega \tilde{d}_n, \quad \tilde{b}_n^R = -i\omega b_n \quad (141)$$

und betrachten den nach [27, Satz 27.4] wesentlich selbstadjungierten Besselschen Differentialoperator

$$\begin{aligned} D(\mathcal{B}^\nu) &:= \{v \in L_{2,2}(0,1) \mid v(r) = r^\nu u(r), \quad u \in C_\infty([0,1]), \quad u'(0) = v'(1) = 0\} \\ (\mathcal{B}^\nu v)(r) &:= -v''(r) - \frac{v'(r)}{r} + \frac{\nu^2}{r^2} v(r) \quad \text{mit } \nu = \omega_n^{1,0} = n - \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Elemente $v \in D(\mathcal{B}^\nu)$ erfüllen $rv' \in C_{1,1}$ und $v \in C_{2,1}$. Daher erhalten wir wie oben (hier mit (141) und $\tilde{c}_n^D = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 r(\mathcal{B}^\nu v)(r) b_n(r) dr &= -i\nu^{-1} \int_0^1 r(\mathcal{B}^\nu v)(r) r a_n^D(r) dr \\ &= i\nu^{-1} \int_0^1 r(rv'(r))' a_n^D(r) dr - i\nu^{-1} \int_0^1 \frac{\nu^2}{r} v(r) r a_n^D(r) dr \\ &= \omega\nu^{-1} \int_0^1 r(rv'(r))' \tilde{a}_n(r) dr - i\nu \int_0^1 v(r) a_n^D(r) dr \\ &=: I_1 + I_2 \\ I_1 &= -i\omega \int_0^1 \tilde{d}_n(r) rv'(r) dr \\ &= \nu\omega \int_0^1 \tilde{a}_n(r) v(r) dr + i\omega \int_0^1 r \tilde{b}_n^R(r) v(r) dr \\ &= -I_2 + \omega^2 \int_0^1 rv(r) b_n(r) dr, \end{aligned}$$

also $b_n \in D(\overline{\mathcal{B}^\nu})$. Bezeichnen wir mit $\omega_{n,m}^{2,1}$ die positiven und für $m \rightarrow \infty$ wachsenden Nullstellen von $J'_{n-1/2}$, so folgt aus [27, Satz 27.4], (141) und Lemma 3.10 entweder

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (\omega_{n,m}^{2,1})^2 \\ b_n(r) &= b_{n,m}(r) = J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,1} r) \\ \tilde{a}_n(r) &= \tilde{a}_{n,m}(r) = i(\omega_{n,m}^{2,1})^{-1} a_{n,m}^D(r) \\ &= -\omega_n^{1,0} (\omega_{n,m}^{2,1})^{-1} r^{-1} b_{n,m}(r) \\ \tilde{d}_n(r) &= \tilde{d}_{n,m}(r) = i(\omega_{n,m}^{2,1})^{-1} d_{n,m}^D(r) \\ &= i(\omega_{n,m}^{2,1})^{-1} b'_{n,m}(r) \end{aligned}$$

oder $\omega > 0$ beliebig und

$$b_n = \tilde{a}_n = \tilde{d}_n = 0.$$

Herr Professor Dr. Hans Volkmer, University of Wisconsin, Milwaukee/USA konnte während seines Gastaufenthaltes in Essen zeigen, daß auch die Funktionen $J'_{n-1/2}$, $n \in \mathbb{N}$ keine gemeinsamen Nullstellen haben: Er ging den Weg von [22, Seite 203], wobei er investieren mußte, daß auch die Nullstellen der $J'_{n-1/2}$ transzendente Zahlen sind ([26, Seite 217]). Damit zerfallen auch die Reihen aus (139) und (140) in eine Komponente.

Im Fall $q = 2$ folgt aus (56), daß der Raum $D_0^{\Gamma_2}(S)$ und damit auch die Orthonormalsysteme verschwinden. Wir erhalten:

Satz 8.4

i) Bis auf normierende Konstanten gelten

$$E_{n,m}^{2,0}(r, \varphi) = \tilde{\tau} J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,0} r) \cos((n - \frac{1}{2})\varphi) \quad (142)$$

$$\begin{aligned} H_{n,m}^{2,0}(r, \varphi) &= \check{\rho} i (\omega_{n,m}^{2,0})^{-1} (J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,0} r))' \cos((n - \frac{1}{2})\varphi) \\ &\quad - \tilde{\tau} i (n - \frac{1}{2}) (\omega_{n,m}^{2,0})^{-1} r^{-1} J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,0} r) \sin((n - \frac{1}{2})\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} E_{n,m}^{2,1}(r, \varphi) &= -\check{\rho} (n - \frac{1}{2}) (\omega_{n,m}^{2,1})^{-1} r^{-1} J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,1} r) \cos((n - \frac{1}{2})\varphi) \\ &\quad + \tilde{\tau} (\omega_{n,m}^{2,1})^{-1} (J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,1} r))' \sin((n - \frac{1}{2})\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (144)$$

$$H_{n,m}^{2,1}(r, \varphi) = -\check{\rho} i J_{n-\frac{1}{2}}(\omega_{n,m}^{2,1} r) \sin((n - \frac{1}{2})\varphi) d\varphi . \quad (145)$$

ii) Für $q = 2$ sind die Orthonormalsysteme leer.

iii) Die Eigenwerte $\omega_{n,m}^{2,0}$ bzw. $\omega_{n,m}^{2,1}$ sind die positiven Nullstellen der Besselfunktion $J_{n-1/2}$ bzw. $J'_{n-1/2}$.

Um die Güte der Lösungen zu untersuchen, betrachten wir zuerst mit der Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{aligned} \theta : (0, 1) \times (0, \pi) &\longrightarrow S \\ (r, \varphi) &\longmapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

und $f \in C^1(S)$, $\theta^* f(r, \varphi) = a(r)b(\varphi)$ mit $b \in C^1([0, \pi])$

$$\begin{aligned} \theta^* \partial_1 f(r, \varphi) &= \cos(\varphi) a'(r) b(\varphi) - r^{-1} \sin(\varphi) a(r) b'(\varphi) \\ \theta^* \partial_2 f(r, \varphi) &= \sin(\varphi) a'(r) b(\varphi) + r^{-1} \cos(\varphi) a(r) b'(\varphi) . \end{aligned} \quad (146)$$

Bekannt ist, daß f genau dann in $H_1(S)$ liegt, wenn

$$\int_0^\pi \int_0^1 r |\theta^* f(r, \varphi)|^2 dr d\varphi , \int_0^\pi \int_0^1 r |\theta^* \partial_i f(r, \varphi)|^2 dr d\varphi < \infty , \quad i = 1, 2 \quad (147)$$

gilt. Insbesondere folgt (147) aus $a(r) \leq cr^\nu$, $a'(r) \leq cr^{\nu-1}$ im Falle $\nu > 0$. Um die Komponentenfunktionen bezüglich kartesischer Koordinaten zu bestimmen, berechnen wir nach (24)

$$\begin{aligned} (r, \varphi) &= \theta^{-1}(x) = (|x|, \arccos(\frac{x_1}{|x|})) \\ (\theta^{-1})^* dr &= \frac{x_1}{|x|} dx^1 + \frac{x_2}{|x|} dx^2 \\ (\theta^{-1})^* d\varphi &= -\frac{x_2}{|x|^2} dx^1 + \frac{x_1}{|x|^2} dx^2 \\ (\theta^{-1})^* dr \wedge d\varphi &= \frac{1}{|x|} dx^1 \wedge dx^2 . \end{aligned}$$

Im Falle $q = 1$ erhalten wir für $F = \check{\rho} f_r + \tilde{\tau} f_\varphi d\varphi$

$$\begin{aligned} (\theta^{-1})^* F(x) &= f_1(x) dx^1 + f_2(x) dx^2 \\ \text{mit } f_1(x) &:= (f_r \circ \theta^{-1})(x) \frac{x_1}{|x|} - (f_\varphi \circ \theta^{-1})(x) \frac{x_2}{|x|} \\ f_2(x) &:= (f_r \circ \theta^{-1})(x) \frac{x_2}{|x|} + (f_\varphi \circ \theta^{-1})(x) \frac{x_1}{|x|} \\ (\theta^* f_1)(r, \varphi) &= f_r(r, \varphi) \cos(\varphi) - f_\varphi(r, \varphi) \sin(\varphi) \\ (\theta^* f_2)(r, \varphi) &= f_r(r, \varphi) \sin(\varphi) + f_\varphi(r, \varphi) \cos(\varphi) . \end{aligned} \quad (148)$$

Im Fall $q = 2$ gilt für $F = \check{\rho} f_{r,\varphi} d\varphi$

$$\begin{aligned} (\theta^{-1})^* F &= f_{1,2}(x) dx^1 \wedge dx^2 \\ \text{mit } f_{1,2}(x) &:= (f_{r,\varphi} \circ \theta^{-1})(x) \\ (\theta^* f_{1,2})(r, \varphi) &= f_{r,\varphi}(r, \varphi) . \end{aligned}$$

Da im Fall $q = 0$ die Komponentenfunktion nicht verändert wird, können wir uns nun den Ausdrücken (142) bis (145) zuwenden. Aus

$$\begin{aligned} (J_\nu(\omega r))' &= \frac{\nu}{r} J_\nu(\omega r) - J_{\nu+1}(\omega r) \omega, \quad \omega > 0 \\ |J_\nu(r)| &\leq r^\nu u(r) \text{ mit } u \in C_\infty([0, 1]), u(r) > 0 \end{aligned} \quad (149)$$

([5, VII.2.(24)] bzw. [27, Seite 346]) und den Bemerkungen oben können wir schließen, daß die die Komponentenfunktionen der Transformationen aller Ausdrücke aus (142) und (145) in $H_1(S)$ liegen. Das gleiche gilt im Falle $n \geq 2$ für die Ausdrücke in (143) und (144). Um eine Auslöschung irregulärer Anteile zu ausschließen, betrachten wir den Fall $n = 1$ in (143). Bezeichnen wir mit f_r den in der Zerlegung (149) irregulären Anteil des Normalenteils und mit f_φ den Tangentialteil, f_1, f_2 die Koeffizienten bezüglich kartesischer Koordinaten (wie oben), so gilt mit $\hat{c} := 1/2 \cdot i(\omega_{1,m}^{2,0})^{-1}$

$$\begin{aligned} f_r(r, \varphi) &= \hat{c} \frac{1}{r} J_{1/2}(\omega_{1,m}^{2,0} r) \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \\ f_\varphi(r, \varphi) &= -\hat{c} \frac{1}{r} J_{1/2}(\omega_{1,m}^{2,0} r) \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right). \end{aligned}$$

Aus (148) und den Additionstheoremen folgt

$$(\theta^* f_1)(r, \varphi) = \hat{c} \frac{1}{r} J_{1/2}(\omega_{1,m}^{2,0} r) \cos\left(-\frac{1}{2}\varphi\right)$$

und aus (146) (bis auf reguläre Terme)

$$\begin{aligned} \theta^* \partial_1 f_1(r, \varphi) &\cong \hat{c} \left(-\frac{J_{1/2}(\omega_{1,m}^{2,0} r)}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{J_{1/2}(\omega_{1,m}^{2,0} r)}{r^2} \right) \cos(\varphi) \cos\left(-\frac{1}{2}\varphi\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \hat{c} \frac{J_{1/2}(\omega_{1,m}^{2,0} r)}{r^2} \sin(\varphi) \sin\left(-\frac{1}{2}\varphi\right) \\ &= -\frac{1}{2} \hat{c} \frac{J_{1/2}(\omega_{1,m}^{2,0} r)}{r^2} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \\ &= cr^{-3/2} \frac{\sin(\omega_{1,m}^{2,0} r)}{r} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right), \end{aligned}$$

wobei wir

$$J_{1/2}(r) = cr^{1/2} \frac{\sin(r)}{r}$$

nach [5, VII,(25)] benutzt haben. Da hiermit die Bedingung (147) verletzt ist, liegen die Transformationen der $H_{1,m}^{2,0}$ nicht in $H_1^1(S)$. Analog verfahren wir mit (144) und erhalten:

Satz 8.5

Bis auf $H_{1,m}^{2,0}$ und $E_{1,m}^{2,1}$, $m \in \mathbb{N}$ liegen die Komponentenfunktionen der Transformationen aller Ausdrücke aus (142) bis (145) in $H_1(S)$.

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Professor Dr. Norbert Weck und Herrn Professor Dr. Karl-Josef Witsch für zahlreiche Diskussionen und die Betreuung meiner Dissertation.

Literatur

- [1] Agmon, S., *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, New York, London, Toronto (1965).
- [2] Alonso, A. und Valli, A., *Some Remarks on the Characterization of the Space of Tangential Traces of $H(\text{rot}; \Omega)$ and the Construction of an Extension Operator*, Manuscripta Math. **89**, 159–178 (1996).
- [3] Bishop, R.L. und Goldberg, S.I., *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, New York (1968).
- [4] Chillingworth, D.R.J., *Differential topology with a view to applications*, Pitman Publishing, London, San Francisco, Melbourne (1976).
- [5] Courant, R., Hilbert, D., *Methoden der Mathematischen Physik I*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1924).
- [6] Duff, G. F. D., *Differential Forms in Manifolds with boundary*, Ann. of Math., **56**, 115–127 (1952).
- [7] Duff, G. F. D., Spencer, D. C., *Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with Boundary*, Ann. of Math., **56**, 128–156 (1952).
- [8] Georgescu, V., *Some Boundary Value Problems for Differential Forms on Compact Riemannian Manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl., **122**, 159–198 (1979).
- [9] Hirsch, M.W., *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics 33, Springer Verlag, New York (1976).
- [10] Hu, S., *Homotopy Theorie*, Academic Press, New York, London (1959).
- [11] Jänich, K., *Vektoranalysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1992).
- [12] Kress, R., *Ein kombiniertes Dirichlet–Neumannsches Randwertproblem bei harmonischen Vektorfeldern*, Arch. Rational Mech. Anal., **42**, 40–49 (1971).
- [13] Kress, R., *Potentialtheoretische Randwertprobleme bei Tensorfeldern beliebiger Dimensionen und beliebigen Ranges*, Arch. Rational Mech. Anal., **47**, 59–80 (1972).
- [14] Leis, R., *Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics*, Teubner, Stuttgart (1986).
- [15] Martensen, E., *Potentialtheorie*, B. G. Teubner Stuttgart (1968).
- [16] Paquet, L., *Problèmes mixtes pour le système de Maxwell*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **4**, 103–141 (1982).
- [17] Picard, R., *Zur Theorie der harmonischen Differentialformen*, Manuscr. Math. **27**, 31–45 (1979).
- [18] Picard, R., *On the boundary value problems of electro and magnetostatics*, Proc. R. Soc. Edinburgh, **92A**, 165–174 (1982).
- [19] Picard, R., *Ein Hodge–Satz für Mannigfaltigkeiten mit nicht–glattem Rand*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **5**, 153–161 (1983).
- [20] Picard, R., *An Elementary Proof for a Compact Imbedding Result in Generalized Electromagnetic Theory*, Math. Z. **187**, 151–164 (1994).
- [21] Picard, R., Weck, N., Witsch, K.J., *Time–Harmonic Maxwell Equations in the Exterior of Perfectly Conducting, Irregular Obstacles*, eingereicht bei SIAM J. Math. Anal. (1999).
- [22] Porter, M. B., *On the Roots of the Hypergeometric and Bessel’s Function*, Amer. Journal of Math., **20**, 193 – 214 (1898).
- [23] Rosenberg, S., *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, Cambridge University Press (1997).
- [24] Saranen, J., *Über das Verhalten der Lösungen der Maxwellschen Randwertaufgabe in Gebieten mit Kegelspitzen*, Math. Meth. Appl. Sci., **2**, 235–250 (1980).
- [25] Schwarz, G., *Hodge Decomposition - A Method For Solving Boundary Value Problems*, Lecture Notes Math., Vol. 1607, Springer Berlin (1995).
- [26] Shidlovskii, A. B., *Transcendental Numbers*, Walter de Gruyter, Berlin, New York (1989).
- [27] Triebel, H., *Höhere Analysis*, Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main (1972).

- [28] Watson, G. N., *A Treatise On The Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press (1922).
- [29] Weber, C., *A local compactness theorem for Maxwell's equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **2**, 12–25 (1980).
- [30] Weber, C., *Regularity Theorems for Maxwell's Equations*, Math. Meth. in the Appl. Sci. **3**, 523–536 (1981).
- [31] Weck, N., *Eine Lösungstheorie für die Maxwellschen Gleichungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht glattem Rand*, Habilitationsschrift, Universität Bonn (1972).
- [32] Weck, N., *Maxwell's Boundary Value Problem on Riemannian Manifolds with Nonsmooth Boundaries*, J. Math. Anal. Appl., **46**, 410–437 (1974).
- [33] Weck, N. und Witsch, K.J., *Generalized Spherical Harmonics and Exterior Differentiation in Weighted Sobolev Spaces*, Math. Meth. Appl. Sci., **17**, 1017–1043 (1994).
- [34] Wentzig, S., *Eigenwerte des Maxwelloperators im wesentlichen Spektrum*, Dissertation, Essen (1995).
- [35] Weyl, H., *Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebigen Ranges*, Math. Z., **56**, 105–119 (1952).
- [36] Witsch, K.J., *A Remark on a Compactness Result in Electromagnetic Theory*, Math. Meth. Appl. Sci., **16**, 123–129 (1993).
- [37] Wloka, J., *Partielle Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart (1982).

Symbole

		c_n	25
		c_n^R, c_n^D	25
		$C_m(S)$	5
		$C_m^q(S)$	6
		$\overset{\circ}{C}_m^q(S)$	6
		$C_m^q(\overline{S})$	6
		$C_\infty^{q,\Gamma}(\overline{S})$	12
		$C_R(S), C_R(S, \gamma_1, \gamma_2)$	18
		d	6
		D	20
		d_M	5
		d_n	25
		d_n^R, d_n^D	25
		Div	20
		$D^{q,\Gamma_2}(S)$	12
		$\hat{D}^{q,\Gamma_2}(S)$	13
		$D^q(S), \overset{\circ}{D}^q(S)$	13
		$D_0^q(S), \overset{\circ}{D}_0^q(S)$	13
		$D_0^{q,\Gamma_2}(S), \hat{D}_0^{q,\Gamma_2}(S)$	13
		$D_{-1/2}^q(S)$	16
		$D_{-1/2}^{q,\Gamma_1}(\partial S)$	39
		$D(f)$	4
		D-Gebiet	17
		div	$12ff, 14, 16$
		Div	20
		dx^i	5
		dx^I	5
		E_n^q	25
		\mathcal{F}	4
		$\mathcal{L}^q, \mathcal{L}_R^q$	19
		$H_m(S)$	4
		$H_m^q(S)$	9
		$\overset{\circ}{H}_m^q(S)$	10
		$H_s^{q,\Gamma_2}(\partial S)$	38
		$H_{-m}^q(S)$	16
		$H_{-s}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$	38
		H_n^q	25
		I'	4
		(I, J)	4
		$ I , I - j, I + j$	4
		\mathcal{J}	4
		J^q	38
		$\text{l}_2(\rho, R)$	25
		$L_p(S)$	4
		$L_{2,N}(I)$	20
		$L_2^q(S)$	10
$*$	5		
\wedge	5		
\oplus	4		
$ \cdot $	4		
$\subset\subset$	4		
$\ \cdot\ _{H_m(S)}$	4		
$\ \cdot\ _{H_m^q(S)}$	9		
$\ \cdot\ _{R_{-1/2}^q(S)}, \ \cdot\ _{D_{-1/2}^q(S)}$	16		
$\ \cdot\ _{L_p(S)}$	4		
$ \cdot _\pm$	22		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2(S)}$	4		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,S}$	10		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^q(S)}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{D^q(S)}$	13		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^q(S) \cap D^q(S)}$	13		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{-m}^q(S)}$	16		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}^q}$	19		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\pm$	22		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu,q,S}$	24		
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{l}_2(\rho,R)}$	26		
γ_N	36		
$\gamma_N^{\Gamma_2}$	39		
$\check{\gamma}_N$	37		
γ_T	35		
$\gamma_T^{\Gamma_1}$	39		
$\check{\gamma}_T$	37		
δ	6		
$\delta_{i,j}$	5		
$\epsilon, \epsilon_\tau, \epsilon_\tau^q$	7		
η_s	17		
κ_q, κ_q'	5		
$\mu, \mu_\tau, \mu_\tau^q$	7		
ρ	19		
$\tilde{\rho}$	19		
$\sigma(I)$	4		
σ_q, σ_q'	5		
τ	19		
$\tilde{\tau}$	19		
τ_*	6		
τ^*	6		
a_n	25		
a_n^R, a_n^D	25		
A^*	4		
A^q	5		
b_n	25		
b_n^R, b_n^D	25		

$L_{2,\mu}^q(S)$	24
m	18
\hat{M}	20
\mathcal{M}	8
\mathcal{M}_D	17
N	12
N^q	25
\check{N}	12
\hat{R}	18
$R(f)$	4
$R^{q,\Gamma_1}(S)$	12
$\hat{R}^{q,\Gamma_1}(S)$	13
$R^q(S), \mathring{R}^q(S)$	13
$R_0^q(S), \mathring{R}_0^q(S)$	13
$R_0^{q,\Gamma_1}(S), \hat{R}_0^{q,\Gamma_1}(S)$	13
$R_{-1/2}^q(S)$	16
$R_{-1/2}^{q,\Gamma_2}(\partial S)$	38
rot	12ff, 14, 16
Rot	20
$\mathcal{S}(q, N)$	4
S_{rot}	29
S_{div}	30
S-Gebiet	8
T	11
\tilde{T}	11
\hat{T}	18
$\mathcal{T}M_x$	5
\mathcal{T}_x	5
$U_N^{+,-,0}(R)$	8
(V, h)	5
ξ_k	9
X	18
y_j^q	38
Y^q, Y_i^q	37
Z-Gebiet	21